

Как найти корни квадратного уравнения?

Авторы: *учащиеся 8 класса*

Руководитель: *Родина Алевтина
Карловна*

МОУ «Блюментальская основная
общеобразовательная школа»

Привет, восьмиклассник!

Твоему вниманию предоставляется проект, который поможет тебе научиться находить корни, квадратных уравнений.

Здесь ты найдёшь и общий алгоритм решения квадратных уравнений, и теоретические сведения и различные интересные задачи и многое другое.

Так что – дерзай!

Сядь поудобнее, засучи рукава и ...ВПЕРЁД!

Цель проекта

- Цель данного проекта – привлечь внимание учащихся к исследовательской деятельности, вызвать интерес к изучению математики, а именно к решению квадратных уравнений. Данный проект предназначен для развития творческих способностей учащихся: предполагает развитие математического и логического мышления при решении поставленных проблем, нацеливает на самостоятельную исследовательскую деятельность, формирует навыки решения квадратных уравнений, активизирует учащихся к работе в предполагаемых проектах и созданию собственных творческих работ.
- *Основной вопрос, на который должны ответить участники проекта:*
Как найти корни квадратного уравнения?

Дидактические цели проекта

- Совершенствование прикладных навыков работы с персональным компьютером в аспекте алгебраических исследований.
- Теоретическое и практическое владение основами решения квадратных уравнений.
- Дальнейшее формирование навыков самостоятельной работы в познавательной деятельности.

Методические цели проекта

- Научить школьников проводить исследования в области математики.
- Научить учащихся понимать структуру формулы и алгоритм вычисления корней.
- Научить школьников оформлять информацию, собранную им самим.

Этапы и ход работы

1 этап. Класс разбивается на группы 5-6 человек.

2 этап. Перед группой ставится проблемный вопрос.

3 этап. Распределение работ внутри группы.

4 этап. Каждая группа должна выполнить:

- поиск материала;
- анализ материала;
- оформить презентацию и буклет.



Этапы и ход работы

- Над проектом мы будем работать в течении 3-х недель.

За это время мы...

Должны решить, что будем делать и зачем.

Как разделиться—кто и с кем.

Теорию отлично изучить.

Задачи подобрать.

И алгоритмы получше осветить.

И вам, друзьям об этом рассказать!



Подробнее о проекте



- Проект *"Как найти корни квадратного уравнения?"* посвящен изучению темы «Квадратные уравнения». В рамках проекта школьники знакомятся с учебным материалом по данной теме. После чего разбиваются на группы. Перед каждой группой ставится проблемный вопрос. Группа проводит поиск и анализ информации с целью проверки собственных гипотез по сформировавшимся вопросам. По итогам проекта каждая группа подготавливает отчет в виде мультимедийных презентаций, буклетов. В рамках проекта предусматривается выступление перед классом по разрабатываемой теме.

Темы исследования учащихся

- 1. «Квадратное уравнение и его корни»
- 2. «Неполные квадратные уравнения»
- 3. «Метод выделения полного квадрата»
- 4. «Решение квадратных уравнений»
- 5. «Приведённое квадратное уравнение. Теорема Виета.»



Немного истории

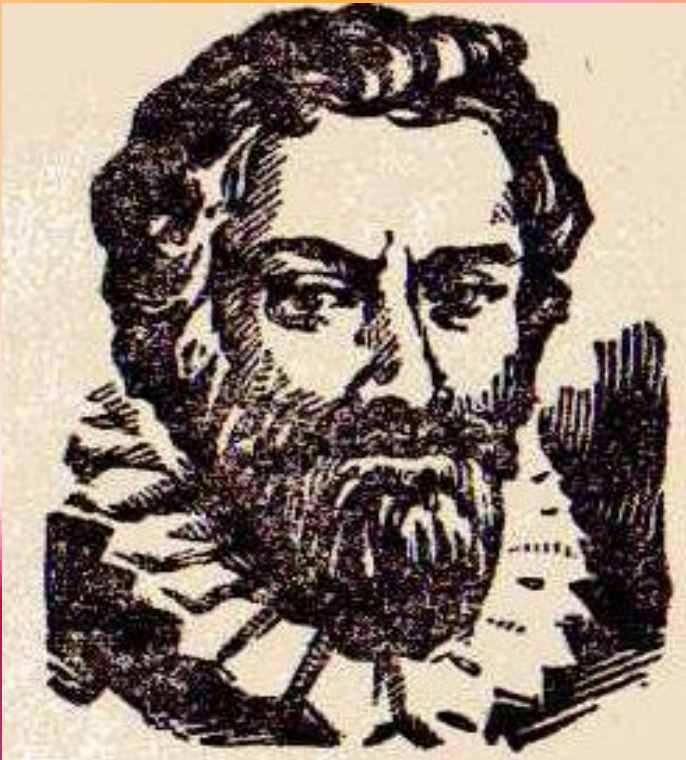
Уравнение 2 – й степени умели решать ещё в Древнем Вавилоне во втором тысячелетии до н.э. Математики Древней Греции решали квадратные уравнения геометрически; например, Евклид – при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях.

Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, рассматриваются во многих древних математических рукописях и трактатах.

Формула корней квадратного уравнения «переоткрывалась» неоднократно. Один из первых дошедших до наших дней выводов этой формулы принадлежит индийскому математику Брахмагупте (около 598 г.).

Средне –азиатский учёный аль - Хорезми (10 век) в трактате «Китаб аль - джебр валь - мукабала» получил эту формулу методом выделения полного квадрата

Немного истории



Франсуа Виет
(1540 – 1603)

- французский математик, ввёл систему алгебраических символов, разработал основы элементарной алгебры. Он был одним из первых, кто числа стал обозначать буквами, что существенно развило теорию уравнений.

Неполные квадратные уравнения

- Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называют неполным, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен 0.
- Таким образом, неполное квадратное уравнение есть уравнение одного из следующих видов:

$$ax^2 = 0,$$

$$ax^2 + c = 0, \quad c \neq 0$$

$$ax^2 + bx = 0, \quad b \neq 0.$$

Покажем, как решаются неполные квадратные уравнения

Решение неполных квадратных уравнений

Решим уравнение

$$5x^2 = 0.$$

Разделив обе части этого
уравнения на 5,

получим:

$$x^2 = 0,$$

откуда

$$x = 0.$$

Ответ : 0

Решим уравнение

$$-3x^2 + 5x = 0.$$

Разложим левую часть
уравнения на множители,
получим:

$$x(-3x + 5) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, x_2 = 5/3.$$

Ответ : 0, 5/3.

Решение неполных квадратных уравнений

❖ Решить уравнение

$$2x^2 + 7 = 0.$$

Уравнение можно записать так:

$$x^2 = -7/2.$$

Это уравнение действительных корней не имеет, так как $x^2 \geq 0$ для любого действительного числа x .

❖ Решить уравнение

$$3x^2 - 27 = 0. \text{ Разделим обе части уравнения на 3: } x^2 - 9 = 0.$$

Это уравнение можно записать так: $x^2 = 9$, откуда $x_{1,2} = \pm 3$.

Проверь себя!

Решите уравнения.

- 1) $x^2 = 0;$
- 2) $9x^2 = 81;$
- 3) $4x^2 - 64 = 0;$
- 4) $9x^2 + 1 = 0;$
- 5) $3x^2 = 1/3;$
- 6) $(x^2 - 1)/3 = 5$

Квадратное уравнение и его корни

Квадратным называют алгебраическое уравнение 2-й степени, т.е. уравнение вида

$$a x^2 + b x + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом трёхчлена

$$a x^2 + b x + c$$

Уравнение

$$a x^2 + b x + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

при этом если $D > 0$, то корни действительные и различные,

при $D = 0$ корни совпадают (говорят, что уравнение имеет корень кратности два),

при $D < 0$ уравнение не имеет корней.

Метод выделения полного квадрата

Для решения
квадратных уравнений
применяется
метод выделения полного
квадрата.

Поясним этот метод на
примерах.

Задача1.

Решить квадратное уравнение
 $x^2 + 2x - 3 = 0$

Преобразуем это уравнение так:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x &= 3, \\x^2 + 2x + 1 &= 3 + 1, \\(x + 1)^2 &= 4.\end{aligned}$$

Следовательно
 $x + 1 = 2$ или $x + 1 = -2$,
откуда
 $x_1 = 1, x_2 = -3$.

Ответ : 1, - 3.

Метод выделения полного квадрата

Задача 2.

Решить уравнение

$$4x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$4x^2 - 8x = -3,$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x = -3,$$

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2x + 4 = -3 + 4,$$

$$(2x - 2)^2 = 1,$$

$$2x - 2 = 1 \quad \text{или} \quad 2x - 2 = -1,$$

$$2x = 3 \qquad \qquad 2x = 1$$

$$x_1 = 3/2, \qquad x_2 = 1/2$$

Ответ: $3/2, 1/2$.

Задача 3.

Решить уравнение

$$x^2 + 5x - 14 = 0.$$

$$x^2 + 5x = 14.$$

$$x^2 + 2 \cdot 5/2 x + 25/4 = 14 + 25/4,$$

$$(x + 5/2)^2 = 81/4,$$

$$x + 5/2 = \pm 9/2.$$

$$x_1 = 9/2 - 5/2 = 2,$$

$$x_2 = -9/2 - 5/2 = -7.$$

Ответ: $2, -7$.

Решение квадратных уравнений

■ Задача 1.

Решить уравнение

$$6x^2 + x - 2 = 0.$$

Здесь $a = 6$, $b = 1$, $c = -2$.

По формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

находим:

$$x_{1,2} = (-1 \pm 7)/12,$$

откуда

$$x_1 = (-1 + 7)/12 = 1/2,$$

$$x_2 = (-1 - 7)/12 = -2/3.$$

Ответ: $1/2$, $-2/3$

Решение квадратных уравнений

■ Задача 2.

Решить уравнение

$$4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Здесь $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$.

По формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ находим:

$$x_{1,2} = (4 \pm 0)/8 = 1/2.$$

Ответ: $1/2$.

Решение квадратных уравнений

Если $b^2 - 4ac < 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней.

Задача 3.

Доказать, что уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$ не имеет действительных корней.

$$\begin{aligned} \text{Здесь } a &= 1, b = -4, c = 5, \\ b^2 - 4ac &= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0. \end{aligned}$$

Следовательно данное уравнение не имеет действительных корней

Приведённое квадратное уравнение

- Квадратное уравнение $x^2 + p x + q = 0$ называется приведенным.

В этом уравнении старший коэффициент равен единице.

Например, уравнение $x^2 + 3 x - 4 = 0$ является приведённым.

Всякое квадратное уравнение $a x^2 + b x + c = 0$ может быть приведено к виду $x^2 + p x + q = 0$ делением обеих частей уравнения на $a \neq 0$.

Для приведённого квадратного уравнения

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

формула корней приведенного квадратного уравнения

Этой формулой удобно пользоваться когда p – чётное число.

Например, решим уравнение $x^2 - 14 x - 15 = 0$.

По формуле находим: $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{(49 + 15)} = 7 \pm 8$

$$x_1 = 7 + 8, \quad x_2 = 7 - 8$$

$$x_1 = 15, \quad x_2 = -1$$

Ответ: 15, -1.

Для приведённого квадратного уравнения справедлива следующая теорема

Теорема Виета



Если x_1, x_2 – корни уравнения
 $x^2 + px + q = 0$
то справедливы формулы

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = q.$$

т.е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Теорема Виета

- Например уравнение

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

имеет корни $x_1 = 10$, $x_2 = 3$; сумма его корней $x_1 + x_2 = 13$, а их произведение $x_1 x_2 = 30$.

Отметим, что теорема Виета справедлива и в случае, когда квадратное уравнение имеет два равных корня: $x_1 = x_2 = -p/2$.

Например, уравнение

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

имеет равные корни: $x_1 = x_2 = 3$; их сумма $x_1 + x_2 = 6$, произведение $x_1 x_2 = 9$

- Задача1.

Один из корней уравнения

$$x^2 + px - 12 = 0$$

равен $x_1 = 4$.

Найти коэффициент p и второй корень x_2 этого уравнения.

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = -12,$$

Так как $x_1 = 4$, то $4x_2 = -12$,

откуда $x_2 = -3$,

$$p = -(x_1 + x_2) = -(4 - 3) = -1$$

Ответ: 3, -1.

Теорема Виета

- **Задача 2.** Составить приведённое квадратное уравнение корни которого

$$x_1 = 3, x_2 = 4.$$

Так как $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ – корни уравнения

$$x^2 + px + g = 0,$$

то по теореме Виета

$$p = -(x_1 + x_2) = -7,$$

$$g = x_1 x_2 = 12.$$

Ответ: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

- **Задача 3.** Один из корней уравнения $3x^2 + 8x - 4 = 0$ положителен. Не решая уравнения, определить знак второго корня.

Разделив обе части уравнения на 3, получим:

$$x^2 + (8/3)x - 4/3 = 0.$$

По теореме Виета $x_1 x_2 = -4/3 < 0$.

По условию $x_1 > 0$,
следовательно, $x_2 < 0$

Обратная теорема Виета

При решении некоторых задач применяется следующая теорема. Обратная теореме Виета:

Если число p, g, x_1, x_2 таковы, что

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = g,$$

то x_1 и x_2 – корни уравнения

$$x^2 + px + g = 0$$

Используя теорему, обратную теореме Виета, иногда можно подбором найти корни квадратного уравнения

Задача.

Подбором найти корни уравнения

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Здесь $p = -5, g = 6$.

Подберём два числа x_1 и x_2 так, чтобы

$$x_1 + x_2 = 5,$$

$$x_1 x_2 = 6,$$

Заметим, что $6 = 2 \cdot 3$, а $2 + 3 = 5$, по теореме, обратной теореме Виета, получаем, что

$x_1 = 2, x_2 = 3$ – корни уравнения

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Участники проекта

■ Группа теоретиков:

- ❖ учит основы теории решения квадратных уравнений
- ❖ выступает на семинаре первыми!

■ Группа практиков:

- ❖ Учит алгоритм решения квадратных уравнений
- ❖ выступает на семинаре вторыми!

Используемые ресурсы

- Учебник «Алгебра 8» Ш.А. Алимов. И др.
- «История математики в школе.» Г.И.Глейзер.



60-1-10.