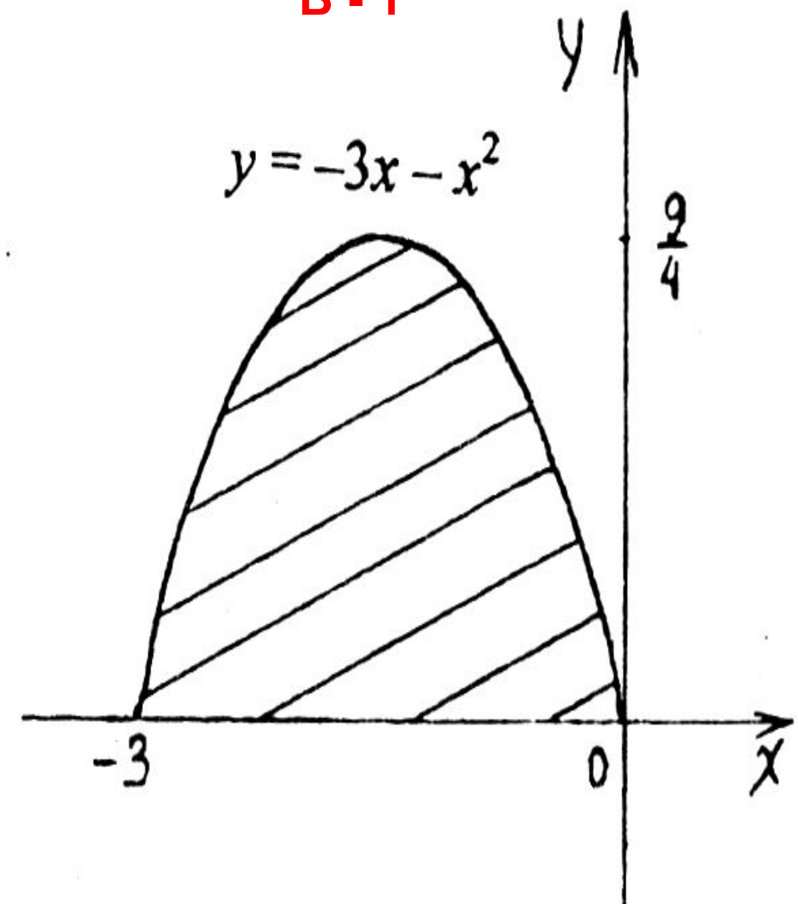
# Интеграл

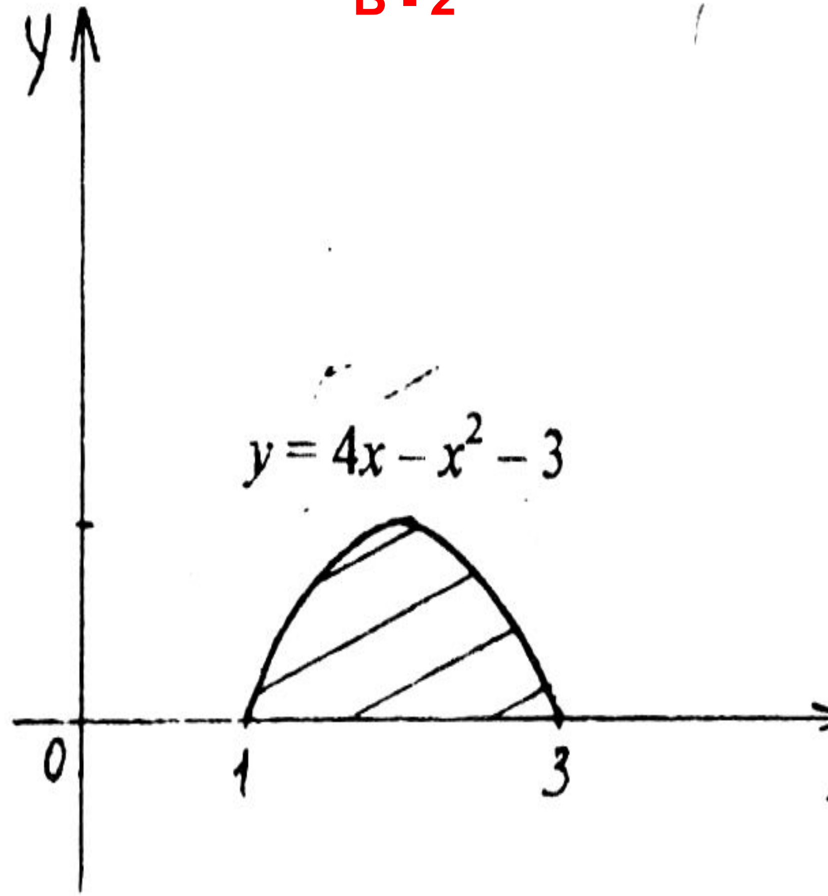
# Повторение

**Вычислите площадь заштрихованной фигуры самостоятельно**

**В - 1**

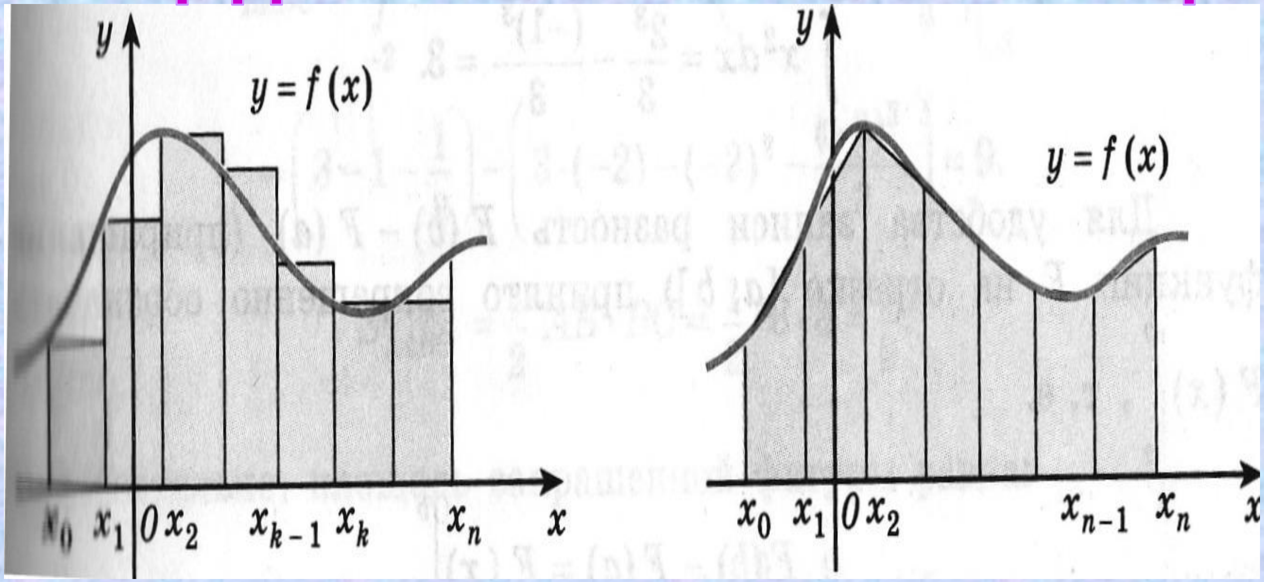



**В - 2**




***Ответы:*** **S = 4, 5** **S = 1⅓**

# Другой подход к вычислению площади криволинейной трапеции




**Отрезок [а;в] разбит на n отрезков одинаковой длины точками $x_1; x_2; \dots ; x_{n-1} ; x_n$.**

**$\Delta x = (в – а)/n$**

**На каждом отрезке как на основании построим прямоугольник высотой $f(x_{k-1})$.**

**$S = f(x_{k-1})\,\Delta x = (в – а)/n\ f(x_{k-1})$.**

**$S_n$ - сумма площадей всех прямоугольников**

***В силу непрерывности f объединение построенных прямоугольников при большом n «почти совпадает» с криволинейной трапецией.***

**$S_n \to S$ при $n \to \infty$.**

# Определение интеграла

**Для любой непрерывной на отрезке [ а; в ] функции f**

***( не обязательно неотрицательной )***

**$S_n$ при n -> ∞ стремится к некоторому числу.**

**Это число называется интегралом функции от а до в.**

# Обозначение

$$\int_a^в f(x)\,dx$$

Т.е. $S_n \to \int_a^в f(x)\,dx$ при $n \to \infty$

а и в – пределы интегрирования: в – верхний предел; а – нижний предел. Знак $\int_в^a$ - знак интеграла. Функция f – подынтегральная функция. Переменная x – переменная интегрирования.

# Из истори

*Г.В.Лейбниц*

*Якоб Бернулли*

*Иоганн Бернулли*

**Символ интеграла введён Лейбницем (1675г.). Этот знак является изменением латинской буквы S ( первой буквы слова summa). Само слово интеграл придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского *integro*, которое переводится как *приводить в прежнее состояние, восстанавливать.* (Действительно, операция интегрирования «восстанавливает» функцию, дифференцированием которой получена подынтегральная функция.) Возможно, происхождение слова интеграл иное: слово *integer* означает *целый.***

**В ходе переписки И. Бернулли и Г.Лейбниц согласились с предложением Я.Бернулли. Тогда же, в 1696г., появилось и название новой ветви математики – *интегральное исчисление*** (calculus integralis), **которое ввел И. Бернулли.**

# Формула Ньютона - Лейбница

*Сравнивая формулы для площади криволинейной трапеции*

$S = F(b) - F(a)$ и $S = \int_a^в f(x)\,dx$

*Получаем*

**Если F – первообразная для f на [а; в], то**

$$\int_a^в f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

***Формула верна для любой функции f, непрерывной на [а; в]***

# Замечания

1. $\int_{-1}^{2}$ 1 / $x^2$ dx – по определению не существует, т.к. на [ -1; 2 ] функция f ( x ) = 1 / $x^2$ не является непрерывной, а значит функция F ( x ) = -1 / x не является первообразной для f ( x ) на [ -1; 2 ]. ( 0 Є [ -1; 2 ] не входит в D ( f )).

2. При a ≥ в $$\int_{a}^{в} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

При таком соглашении формула Ньютона – Лейбница оказывается верной при произвольных а и в. В частности, $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$

# Свойства интеграла

## Сформулируйте и докажите

1) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$ 3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

4) Если $a < c < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

(*аддитивное свойство интеграла*).

# Вычисление площадей с помощью интеграла

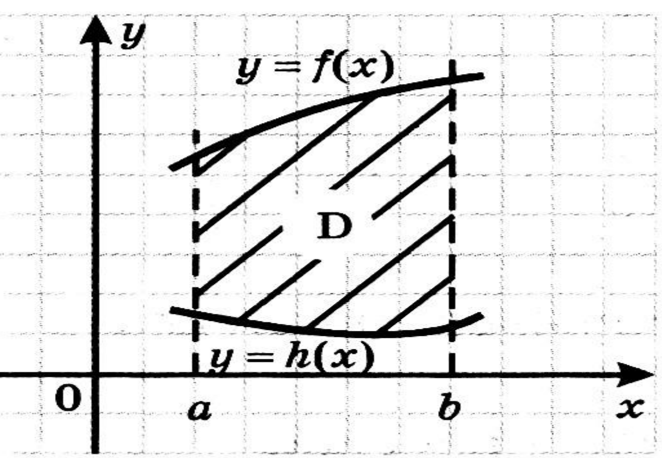
Если фигура $D$ представляет собой часть плоскости $xOy$, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиками непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $y = f(x)$, $y = h(x)$ таких, что для любого $x$ из $[a; b]$ выполняется неравенство $h(x) \le f(x)$, то площадь $S$ фигуры $D$ (рис. 1) вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - h(x))\,dx.}$$

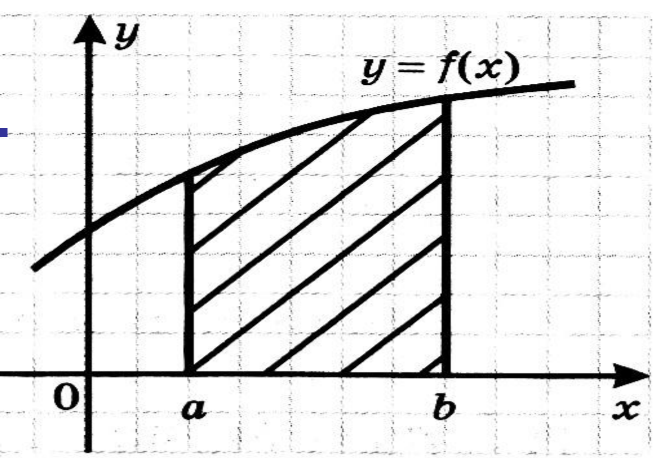
Площадь праволинейной трапеции, представленной на рис. 2., вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

1.




2.



# Задания

1. Вычислить интеграл от 0 до 2 функции $f(x) = x^3$ ( от – 1 до 1 )

2. Вычислить интеграл от $-\pi/4$ до $\pi$ функции $f(x) = 3\cos 2x$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = 2x$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $x = 0$; $y = x^2 - 4x + 5$ и касательной к этому графику в точке $x_0 = 2$.

# Задания уровня С

**Найдите** ***площадь фигуры*** **ограниченной линиями**

***$y = x^2 – 6x + 5$ и $y = 5 – 2x – x^2$***

***двумя способами:***

***1) с помощью площадей криволинейных трапеций;***

***2) с помощью интеграла и его свойств.***

# Работа в группах

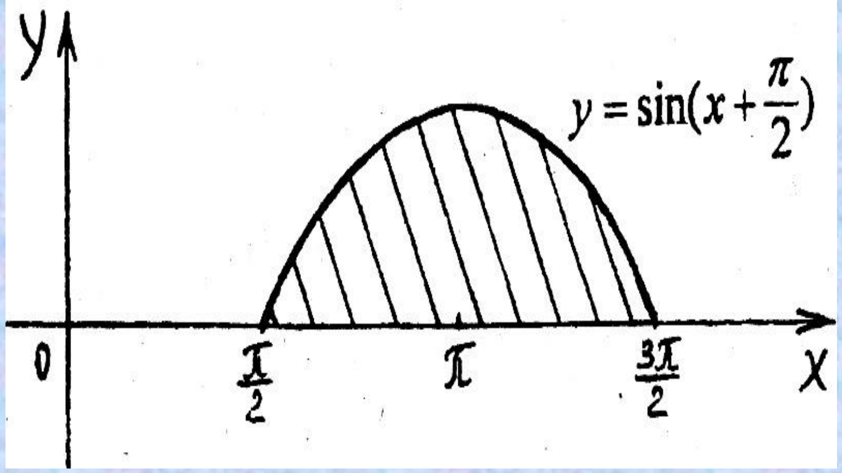
**Группа 1: № 361 ( а; г ); 364 ( б; в ).**

**Группа 2: № 361 ( б; в ); 364 ( а; г ).**

**Группа 3:**

1) **Вычислите площадь заштрихованной фигуры**

**Ответ: 2**




2) **Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями** $y = x^2$; $y = 4$; $x = -2$; $x = 2$.

**Ответ:** $5\frac{1}{3}$

3) **Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями** $y = x^2 + 1$; $y = 5$.

**Ответ:** $\frac{2}{3}$

# Программированный контроль

| Задание | | Ответ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Вариант I | Вариант II | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Вычислите: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$; $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^4}$ | $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^5}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{15}{8}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{15}{64}$ | $\frac{1}{2}; \frac{15}{16}$ | $\sqrt{2}; \frac{7}{24}$ |
| Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$; $y = 0$; $x = 2$. | $y = x^3$; $y = 0$; $x = 2$. | 4 | 8 | $2\frac{2}{3}$ | 2 |

<u>*Верный ответ:*</u>

Вариант 1: 2; 4; 3.

Вариант 2: 3; 2; 1.

# Домашнее задание

*п. 30 ( выучить к зачёту по § 7 – 8 теоретический материал);*
*№ 362; 360 (а; г);*
*повторить уравнение касательной п. 19.*

**По желанию.**

**Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями**
**$x = 0$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $x = \pi / 2$.**

**Ответ:** $2\sqrt{2} - 2$.