

Инструментарий для работы с псевдослучайными последовательностями

Генерация псевдослучайных
последовательностей на основе
моделей хаотической динамики и
анализ их свойств.

Динамический хаос

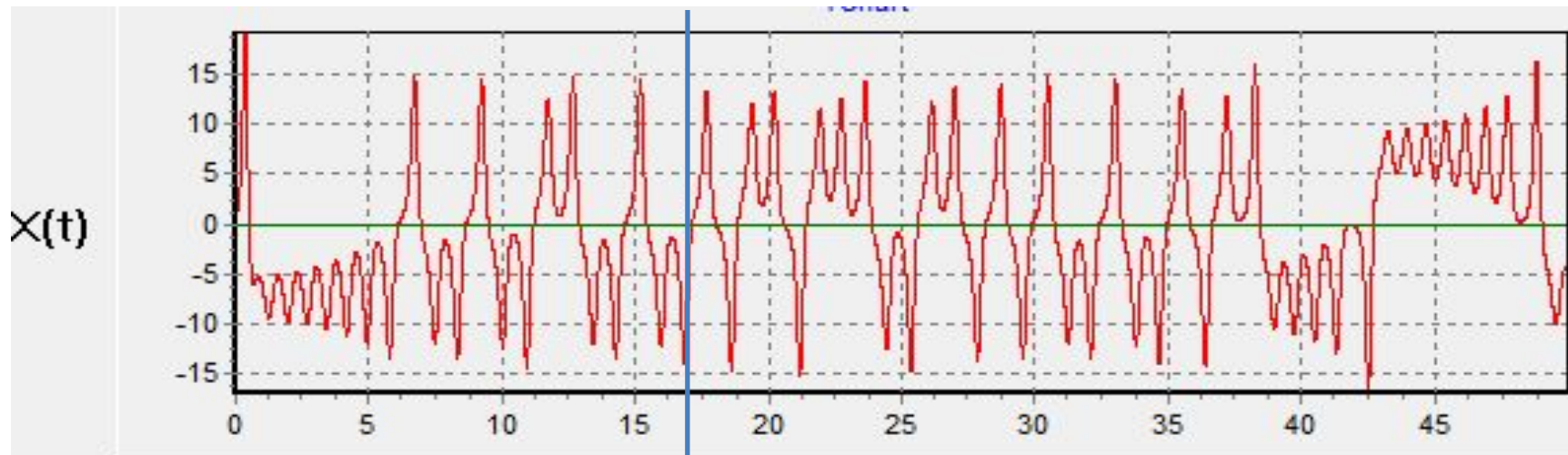
Существуют динамические системы

$$\begin{cases} x' = f_x(t, x, y, z) \\ y' = f_y(t, x, y, z) \\ z' = f_z(t, x, y, z) \end{cases}$$

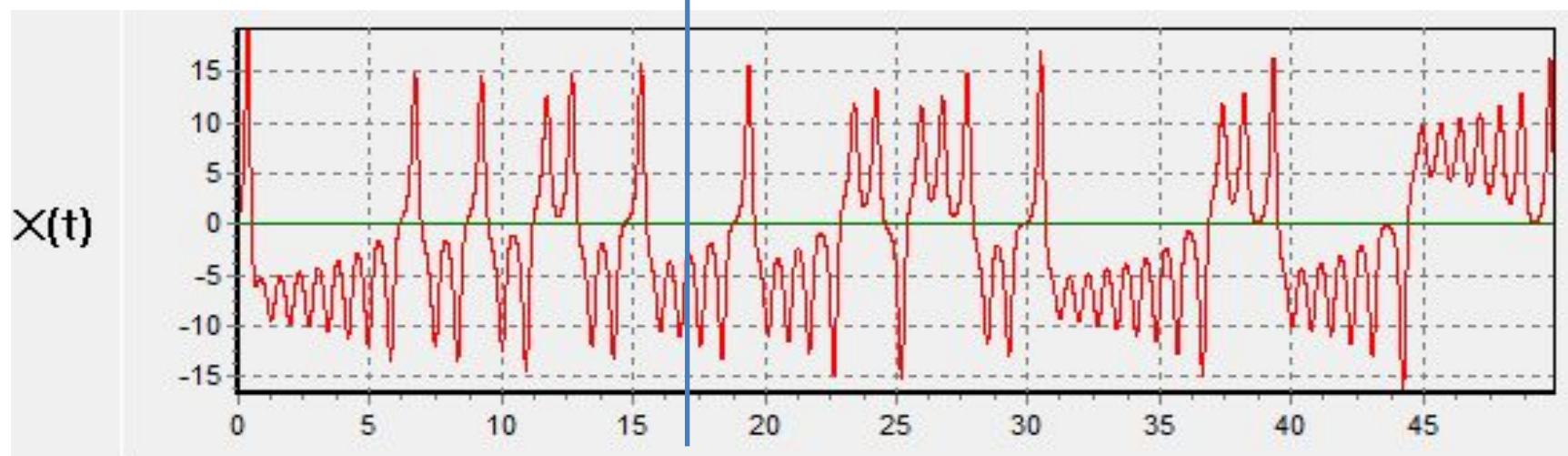
решение которых обладает хаотическими свойствами.

Динамический хаос

- $X(0)=1$



- $X(0)=1,001$



Постановка задачи

Разработать набор программных средств
для

- 1) решения системы ОДУ,
- 2) генерации на основе получаемых
решений бинарных
последовательностей,
- 3) анализа статистических свойств
полученных последовательностей .

Работа с динамической моделью

Для решения системы ОДУ используется метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности.

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k1_x + 2k2_x + 2k3_x + k4_x) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k1_y + 2k2_y + 2k3_y + k4_y) \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(k1_z + 2k2_z + 2k3_z + k4_z) \end{cases}$$

Расшифровка коэффициентов

$$k1_j = f_j(t_j, x_i, y_i, z_i)$$

$$k2_j = f_j\left(x_i + k1_j \frac{h}{2}, y_i + k1_j \frac{h}{2}, z_i + k1_j \frac{h}{2}\right)$$

$$k3_j = f_j\left(x_i + k2_j \frac{h}{2}, y_i + k2_j \frac{h}{2}, z_i + k2_j \frac{h}{2}\right)$$

$$k4_j = f_j(x_i + k3_j h, y_i + k3_j h, z_i + k3_j h)$$

Формирование бинарной последовательности

- Полученное решение разбивается на отрезки определенной длины.
- На каждом отрезке подсчитывается количество пиков функции-решения.
- Если на отрезке количество пиков четно, то в бинарную последовательность добавляется значение 0, если нечетно – 1.

Формирование бинарной последовательности

Рассматривается несколько вариантов определения пиков

- 1)
$$\begin{cases} abs(X_{i-1}) < abs(X_i) \\ abs(X_{i+1}) < abs(X_i) \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} X_{i-1} < X_i \\ X_{i+1} < X_i \end{cases}$$
- 3)
$$\begin{cases} X_i < X_{i-1} \\ X_i < X_{i+1} \end{cases}$$

Анализ «случайности» построенной последовательности

- Для определения статистических свойств полученной бинарной последовательности применяются следующие тесты.

1) Частотный тест

$$V_1 = \frac{(n_0 - n_1)^2}{n_0 + n_1}$$

Анализ «случайности» построенной последовательности

- Для определения статистических свойств полученной бинарной последовательности применяются следующие тесты.

1) Частотный тест

$$V_1 = \frac{(n_0 - n_1)^2}{n_0 + n_1}$$

Анализ «случайности» построенной последовательности

- Для определения статистических свойств полученной бинарной последовательности применяются следующие тесты.

1) Частотный тест

$$V_1 = \frac{(n_0 - n_1)^2}{n_0 + n_1}$$

Анализ «случайности» построенной последовательности

- Для определения статистических свойств полученной бинарной последовательности применяются следующие тесты.

1) Частотный тест

$$V_1 = \frac{(n_0 - n_1)^2}{n_0 + n_1}$$

Анализ «случайности» построенной последовательности

- Для определения статистических свойств полученной бинарной последовательности применяются следующие тесты.

1) Частотный тест

$$V_1 = \frac{(n_0 - n_1)^2}{n_0 + n_1}$$

Анализ «случайности» построенной последовательности

- 5) Проверка спектра Фурье.

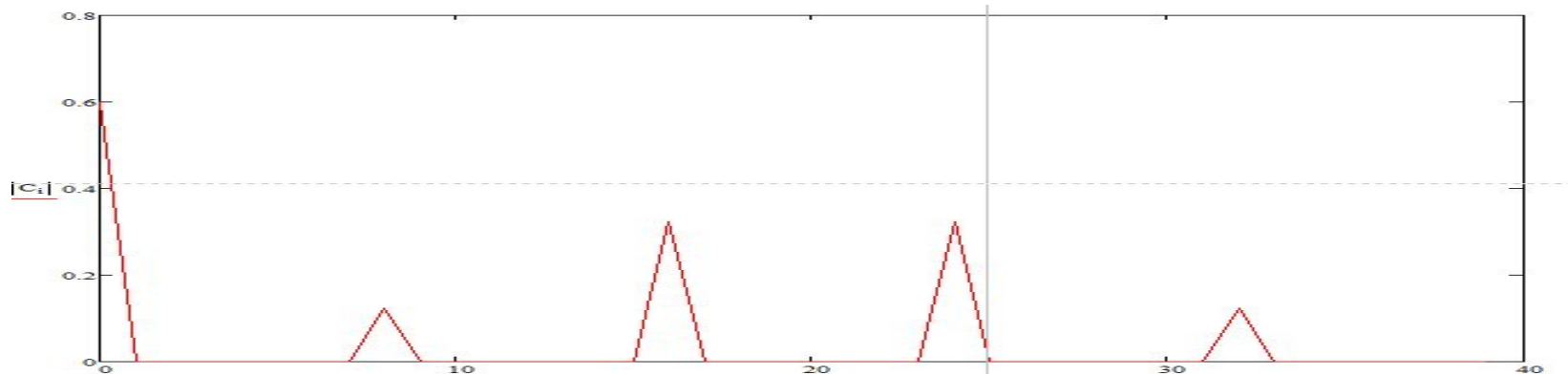
$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \quad n = 0, \dots, N - 1.$$



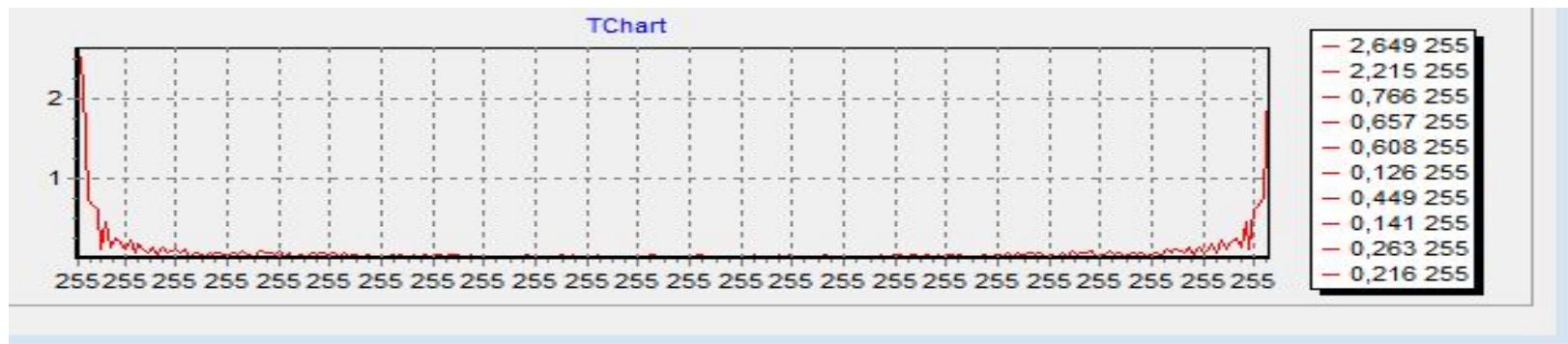
Анализ «случайности» построенной

последовательности

Если исходная последовательность
нечисловая



Если исходная - случайна



Пример

Для определения статистических свойств полученной бинарной последовательности применяются следующие тесты.

1) Частотный тест

$$V_1 = \frac{(n_0 - n_1)^2}{n_0 + n_1}$$

Численный эксперимент

Начальные условия примем такие:

$$X(0)=1; Y(0)=1; Z(0)=1;$$

$$h=0,01; \quad (\text{шаг Рунге-Кутты})$$

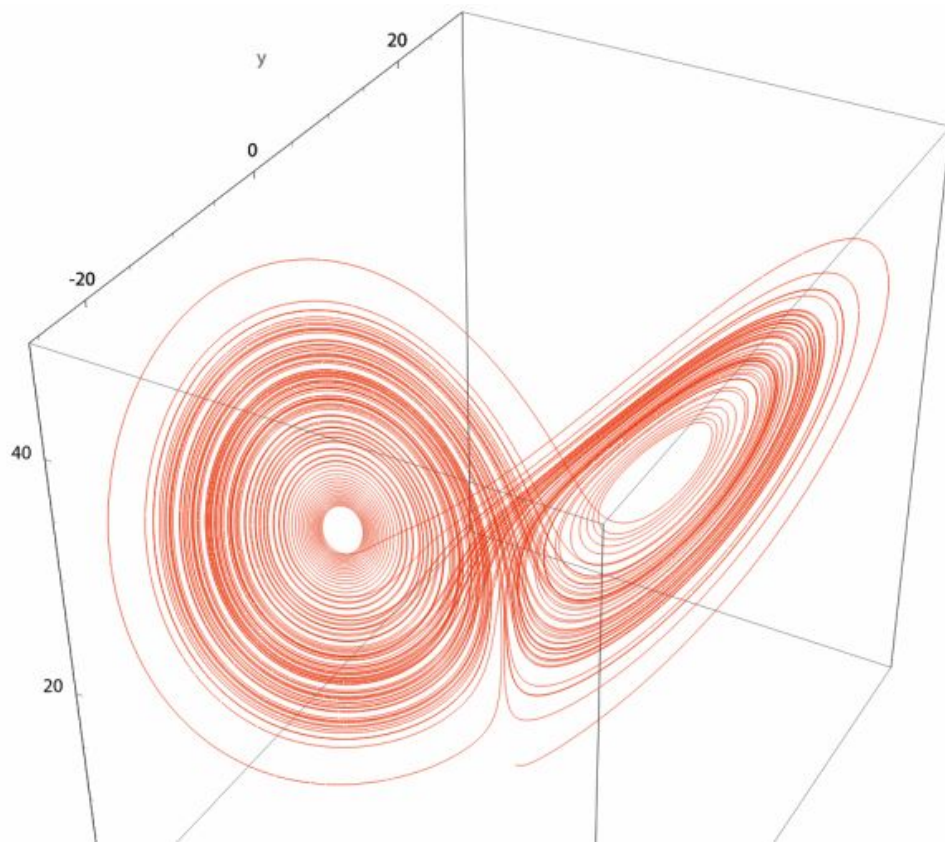
$$n=1000; \quad (\text{количество шагов})$$

$$k=10; \quad (\text{количество отрезков слежения})$$

$$T_0=1;$$

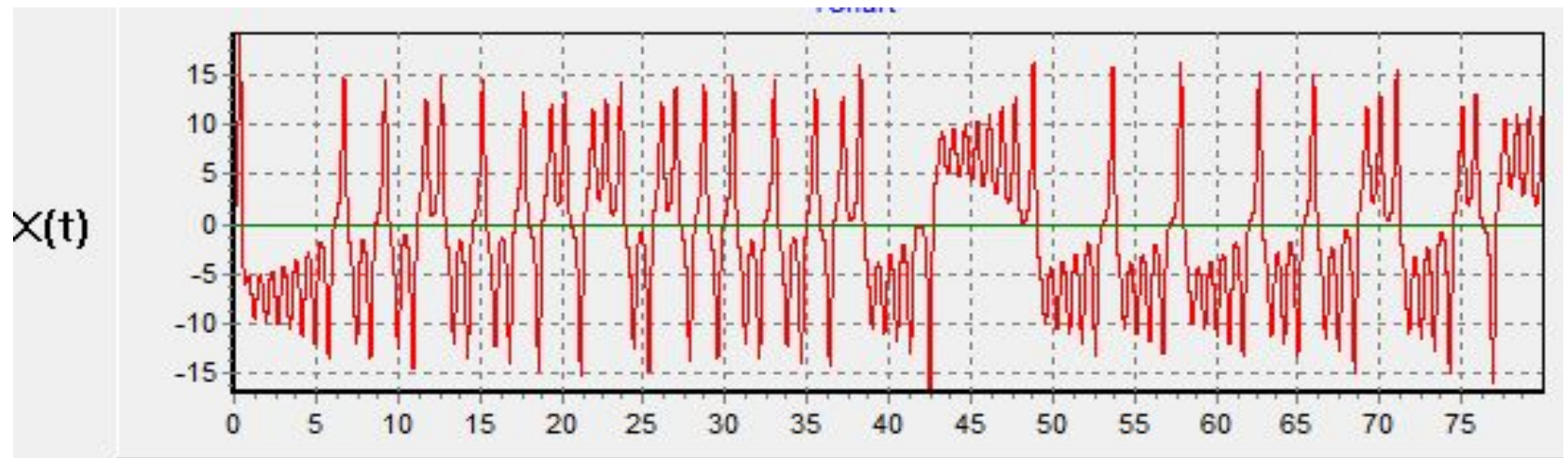
Фазовый портрет решения

С течением времени решение выходит на хорошо видимый аттрактор и хаотически блуждает по нему.



Численный эксперимент

Решение приведем для $X(t)$:



Заметим, что после значения $t=5$ наблюдается квазицикличность – решение вышло на аттрактор.

Численный эксперимент

- Для получения более длинной последовательности можно продлевать отрезок расчета.
- После подсчета и упрощения получим такую бинарную последовательность:

00001111000011100010000111100111000...

Значения статистик

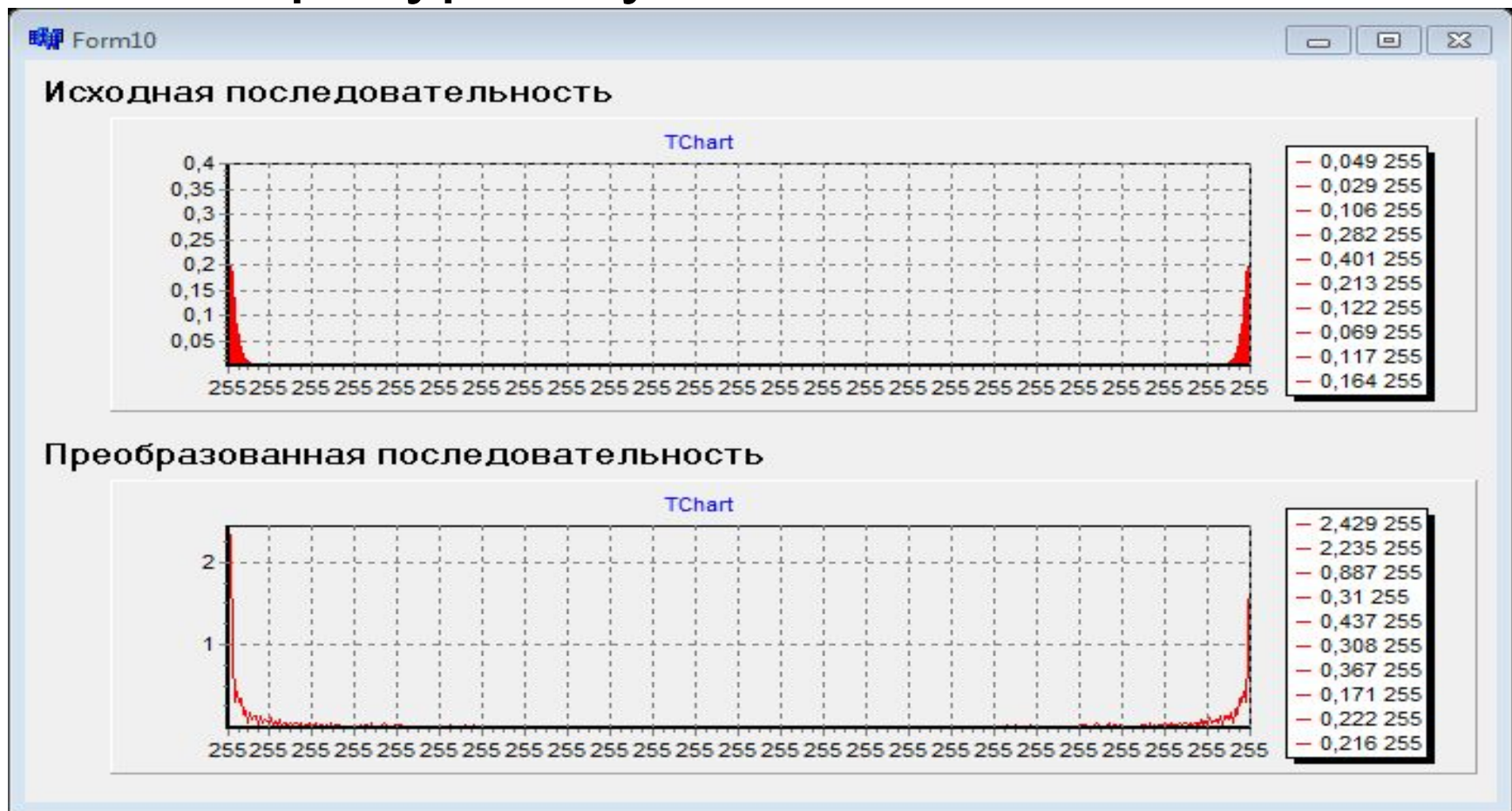
- Для определения статистических свойств полученной бинарной последовательности применяются следующие тесты.

1) Частотный тест

$$V_1 = \frac{(n_0 - n_1)^2}{n_0 + n_1}$$

Значения статистик

- Спектр Фурье будет выглядеть так:



Спасибо за внимание