

Графики поверхностей и графики кривых в пространстве

Лекция 6.



**Построение поверхностей,
заданных в явном виде в
декартовой системе координат**

Задана функция $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$.

Постройте график соответствующей
поверхности

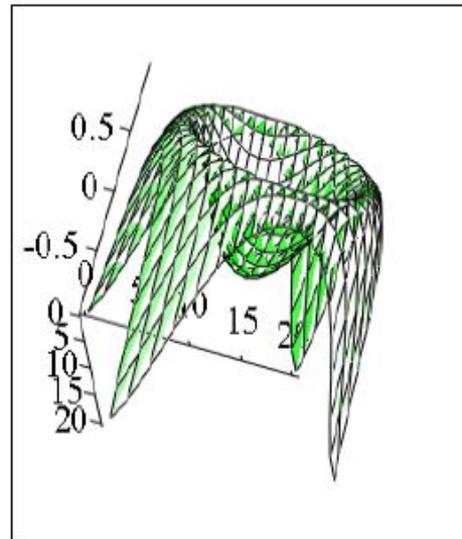
$$N = 20$$

$$i = 0..N \quad j = 0..N \quad x_i = -1.5 + .15 \cdot i \quad y_j = -1.5 + .15 \cdot j$$

$$f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$M_{i,j} = f(x_i, y_j)$$

В соответствующем поле ввода на графике в качестве аргумента следует указать массив значений функции $M_{i,j}=f(x_i,y_j)$ как матрицу соответствующих значений аппликата.



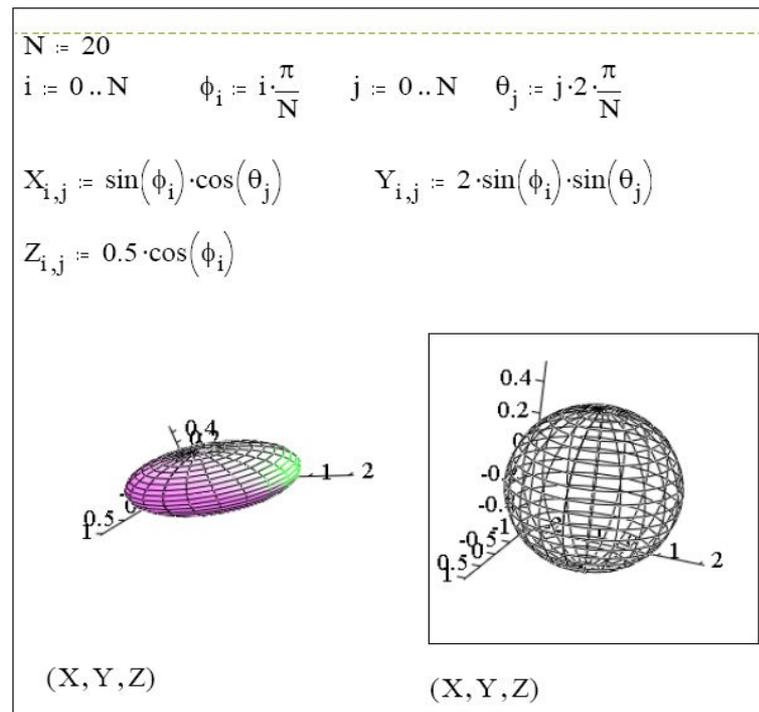
Постройте изображение эллипсоида

Для построения поверхности, заданной при помощи параметров, следует знать, что MathCad интерпретирует поверхность как аппликаты точек соответствующей функции абсцисс и ординат.

Поэтому вначале следует задать соответствующие значения трех матриц, определяя их как функции дискретных параметров в заданном диапазоне. При этом следует следить за тем, чтобы эти матрицы обязательно имели одинаковое число строк и столбцов.

После этого достаточно напечатать имена этих трех матриц в поле ввода графической области.

Рис 2. Изображение сферы



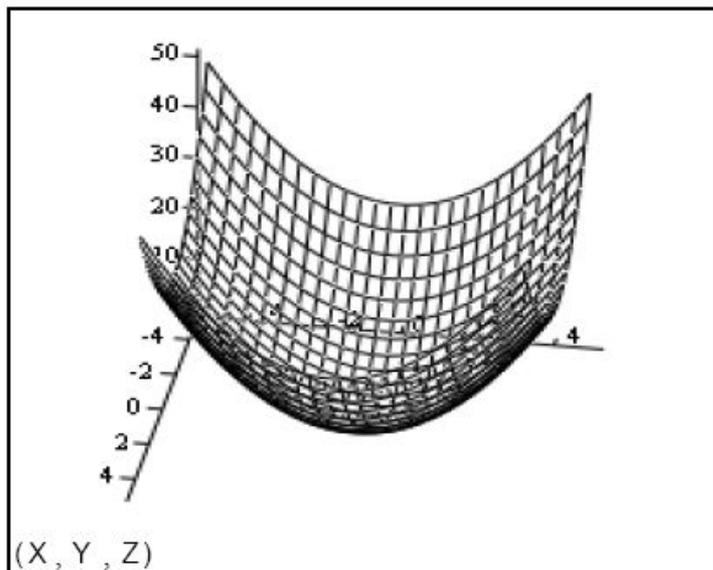
Построение параболоида вращения производится в декартовой системе координат. $F(X, Y) := X^2 + Y^2$ Функция двух переменных, определяющая параболоид вращения.

Необходимо определить интервалы, в пределах которых изменяются значения X и Y : $a := -5$ $b := 5$

Ввод количества дискретных точек по осям X и Y :

$M := 25$ $N := 25$ $i := 0..M$ $j := 0..N$

$X_{i,j} := a + (b - a) \cdot \frac{i}{M}$ $Y_{i,j} := a + (b - a) \cdot \frac{j}{N}$ $Z_{i,j} := F(X_{i,j}, Y_{i,j})$





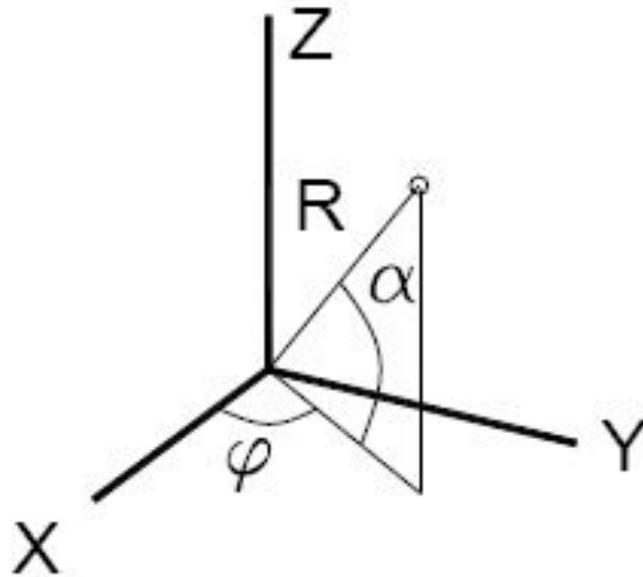
**Построение поверхностей
в сферической и
цилиндрической системах
координат**

Связь между декартовой системой координат и сферической определяется формулами:

$$Y = R \cos(\alpha) \sin(\varphi)$$

$$X = R \cos(\alpha) \cos(\varphi)$$

$$Z = R \sin(\alpha)$$



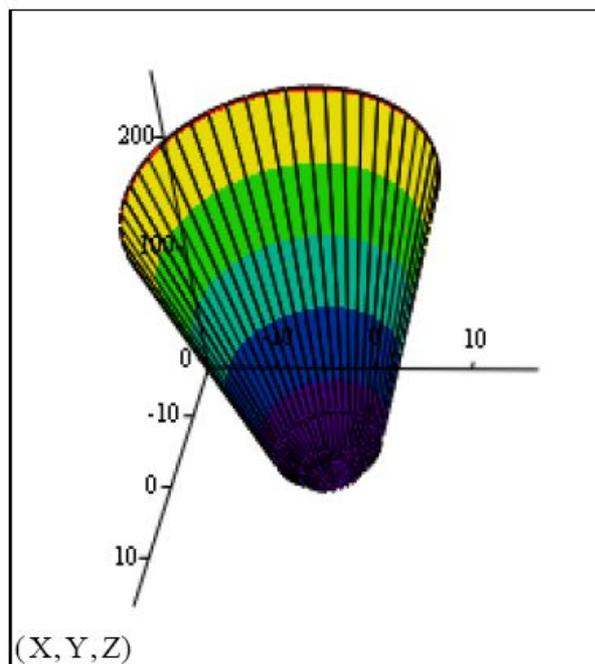
Если существует функция $F(X,Y,Z) = 0$, связывающая координаты X, Y, Z , то возможно определить взаимосвязь между переменными α, ϕ, R , что и сделано в следующем примере.

Угол α изменяется в пределах от 0 до π , угол ϕ от 0 до 2π .

$M := 25$ $N := 50$ $i := 0..M$ $j := 0..N$

$$\alpha_i := \frac{\pi \cdot i}{M} \quad \phi_j := \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{N}$$

$$X_{i,j} := \tan(\alpha_i) \cdot \cos(\phi_j) \quad Y_{i,j} := \tan(\alpha_i) \cdot \sin(\phi_j) \quad Z_{i,j} := \tan(\alpha_i)^2$$

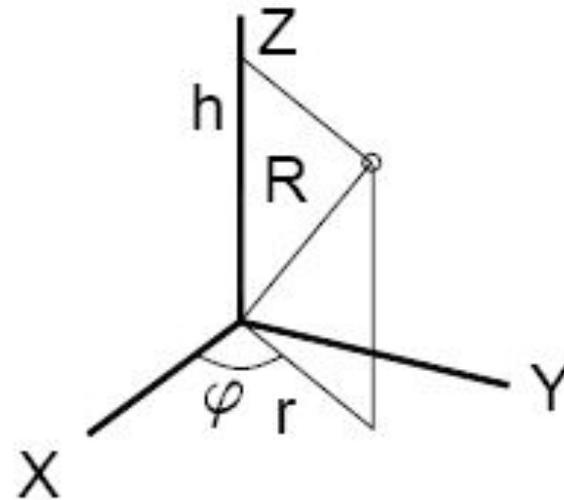


**Связь между декартовой и
цилиндрической системами координат
выражается формулами:**

$$Y = r \sin(\varphi)$$

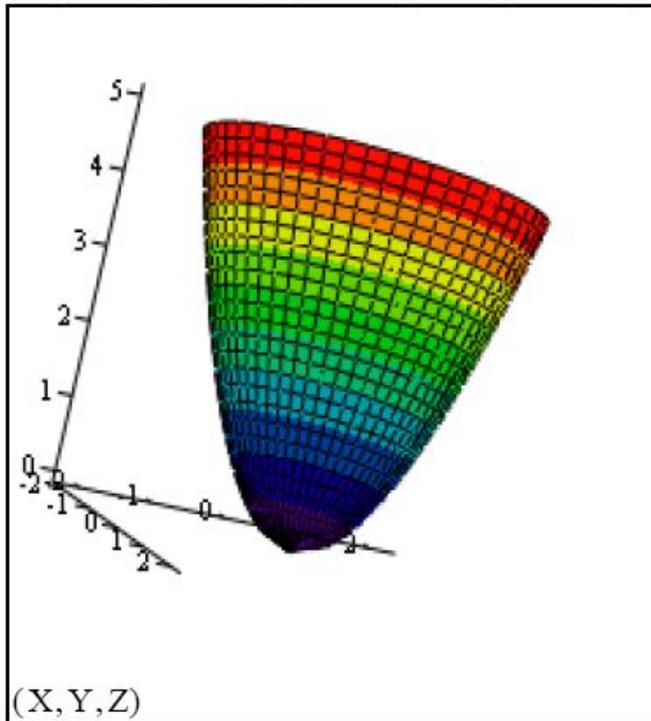
$$X = r \cos(\varphi)$$

$$Z = Z.$$



$$M := 25 \quad N := 50 \quad i := 0..M \quad j := 0..N \quad r := 5 \quad \phi_{i,j} := \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{N} \quad Z_{i,j} := r \cdot \frac{i}{M} \quad R_{i,j} := \sqrt{Z_{i,j}}$$

$$X_{i,j} := R_{i,j} \cdot \cos(\phi_{i,j}) \quad Y_{i,j} := R_{i,j} \cdot \sin(\phi_{i,j})$$



Проблемы, возникающие при построении графиков

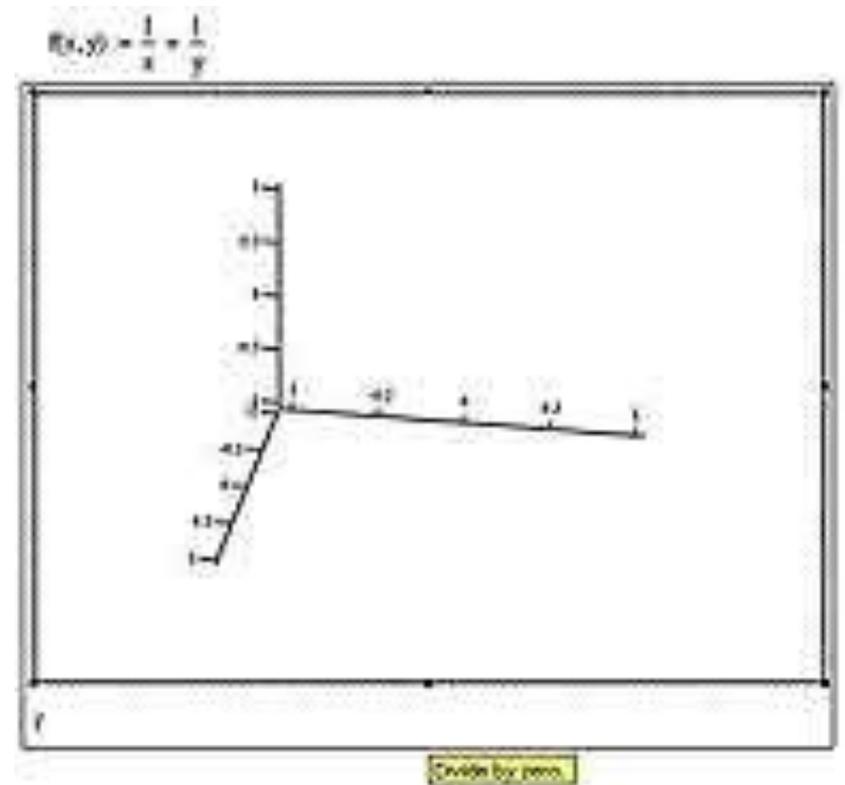
График – всего лишь приближенная визуализация некоторой математической функции. Во-первых, MathCAD часто вовсе не захочет строить график тех функций, для которых он найдет неустранимые разрывы в области построения графика.

К примеру, график $z = 1/x + 1/y$ на стандартном для трехмерных графиков интервале от -5 до +5 и посмотрите, что получится.

Вдоль прямых $x = 0$ и $y = 0$ график будет уходить в бесконечность.

Поэтому здесь придется искать точку разрыва и строить графики отдельно для областей справа и слева от нее.

Если точек разрыва много (например, для периодических функций в знаменателе), то это может оказаться довольно-таки утомительно, но на самом деле какого-либо общего и простого метода решения данной проблемы просто не существует.



Бывает, что MathCAD разрывы игнорирует, и их существование на графике никаким образом не отображается.

Примером этому может служить построение такого графика, как $z = x*y/\cos(x*y)$.

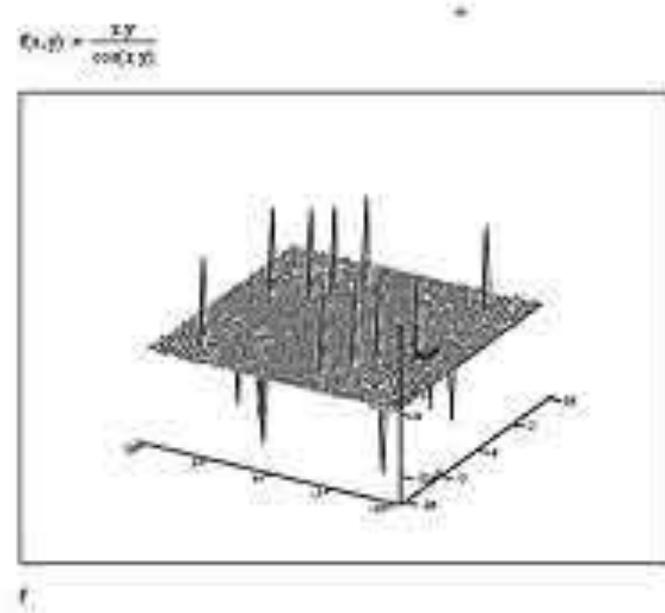
Вполне естественно предположить, что в тех точках, где знаменатель равен нулю (т. е. $x*y = \pi/2$), график будет устремляться к бесконечности. На практике же MathCAD, спокойно строит нечто, что якобы является ее графиком.

Почему такое происходит?

Графики MathCAD строит дискретно, вычисляя значения функции в определенных точках, а после соединяя их прямыми. Естественно, чем меньше шаг дискретизации (т.е. расстояние между соседними вычисляемыми значениями функции), тем больше вероятность того, что при построении графика MathCAD столкнется с точкой разрыва — тогда мы получим именно тот самый случай, когда программа откажется напрочь строить такой график.

Но бывает и другой случай — MathCAD просто пропускает точку разрыва, сглаживая ее прямыми — т.е. эта точка попадает между опорными точками, по которым программа строит график нашей поверхности.

Так что, как видите, построение трехмерных графиков — задача, требующая часто творческого подхода к ее решению.



Функция CreateMesh

Использование функции CreateMesh предполагает параметризацию той поверхности, которую вы хотите визуализировать с использованием MathCAD'a.

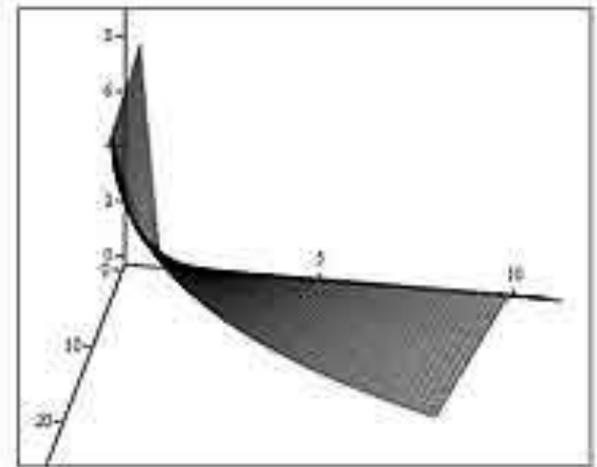
Итак, во-первых, нужно задать три функции, описывающие зависимость каждой из координат (x, y, z) от **двух параметров** (с другим числом параметров MathCAD работать не умеет).

Для определенности положим, что параметры у нас будут a и b. После того, как функциональная зависимость задана, функции $x(a,b)$, $y(a,b)$ и $z(a,b)$ нужно сгруппировать в вектор-столбец. Напомню, что для этого нужно создать с помощью кнопки Matrix or Vector, расположенной на панели инструментов Matrix, матрицу размером 3 на 1, в элементы которой и вписать указанные функции. Далее добавляем на рабочую область MathCAD поле трехмерного графика, внизу которого пишем следующее (без кавычек): "CreateMesh(f, 0, 10, 0, 10, 50, 50)". Результаты построения одной из возможных параметрических поверхностей вы можете увидеть на рисунке.

Давайте теперь разберемся с параметрами, которые указаны для функции CreateMesh. Первым стоит имя нашего вектора с функциями.

После имени вектора идут соответственно минимальное и максимальное значения для первого и второго параметров. Далее идут два параметра, указывающие MathCAD, на сколько шагов разбить указанный диапазон для построения точек, по которым уже будет чертиться собственно график.

$$\begin{aligned}x(a,b) &= a \ln(b) + 2 \\y(a,b) &= e^{-a^2} + b \\z(a,b) &= \frac{a}{\sqrt{|b|} + 1}\end{aligned}$$
$$f(a,b) = \begin{pmatrix} x(a,b) \\ y(a,b) \\ z(a,b) \end{pmatrix}$$



CreateMesh(f, 0, 10, 0, 10, 50, 50)

Все параметры, кроме имени вектора, описывающего поверхность, являются необязательными.

Для того, чтобы показать всю простоту и мощь применения CreateMesh, приведу еще один пример, а именно построение с помощью данной функции сферы. Для этого нужно задать следующие уравнения в описанном выше примере: $x(a,b) := \sin(a) \cdot \cos(b)$;

$$y(a,b) := \sin(a) \cdot \sin(b);$$

$$z(a,b) := \cos(a).$$

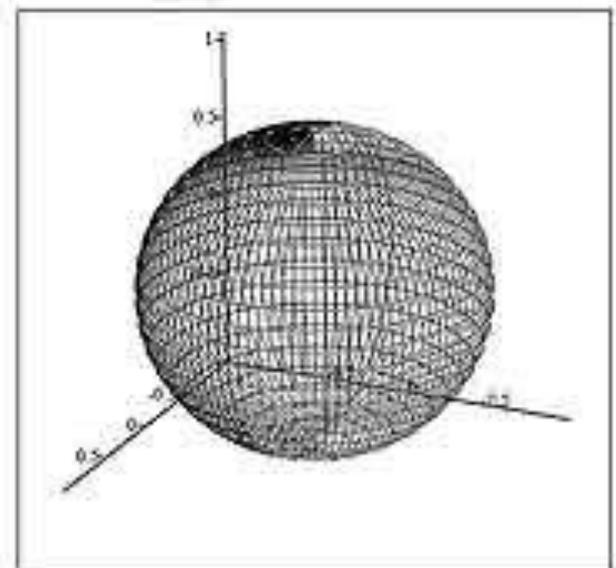
Кроме того, нужно поменять также и диапазоны, в которых будут изменяться a и b : первый параметр будет меняться от нуля до двух пи, второй — от нуля до пи. Результат построения сферы вы также можете увидеть на соответствующем рисунке.

$$x(a,b) := \sin(a) \cdot \cos(b)$$

$$y(a,b) := \sin(a) \cdot \sin(b)$$

$$z(a,b) := \cos(a)$$

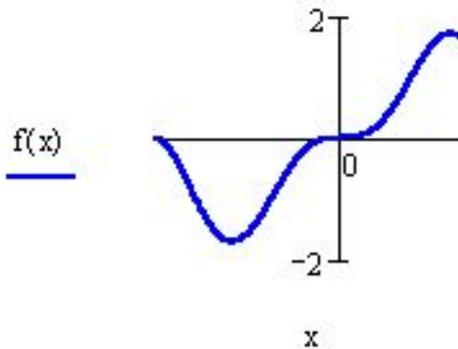
$$z(a,b) := \begin{pmatrix} x(a,b) \\ y(a,b) \\ z(a,b) \end{pmatrix}$$



CreateMesh[f, 0, 2π, 0, π, 30, 30]

Поверхности, полученные вращением кривых вокруг осей

$$f(x) := x \cdot \sin(x)^2 \quad a := -\pi \quad b := 2$$



При этом необходимо обеспечить пересчет координат точек фигуры по известным из геометрии формулам.

Вращение кривой вокруг оси Ox

$$F(u, v) := u$$

$$\text{mesh} := 30$$

$$G(u, v) := f(u) \cdot \cos(v)$$

$$H(u, v) := f(u) \cdot \sin(v)$$

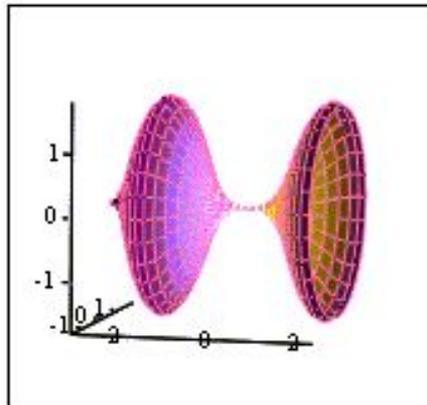
Вращение кривой вокруг оси Oy

$$X(u, v) := u \cdot \sin(v)$$

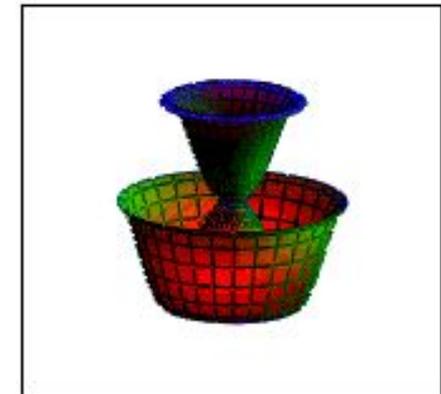
$$Y(u, v) := u \cdot \cos(v)$$

$$Z(u, v) := f(u)$$

$$SX := \text{CreateMesh}(F, G, H, a, b, 0, 2\pi, \text{mesh}) \quad SY := \text{CreateMesh}(X, Y, Z, a, b, -\pi, \pi, \text{mesh})$$



SX



SY

Функция CreateSpace

$$F(t) := \begin{pmatrix} t \cdot \sin(t) \\ t \cdot \cos(t) \\ t \end{pmatrix} \quad t0 := 0 \quad t1 := 16 \quad tgrid := 160$$

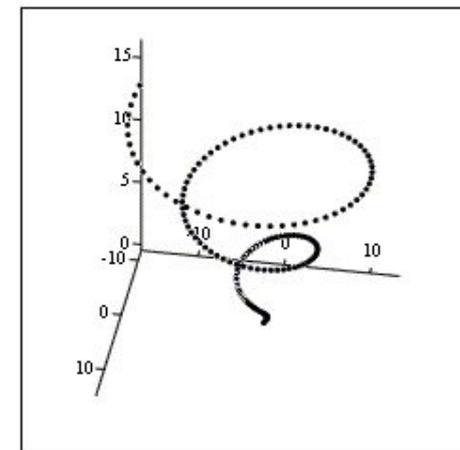
C := CreateSpace(F, t0, t1, tgrid)

Фактически эту функцию можно считать

аналогом CreateMesh с той лишь разницей что эту функцию можно использовать для построения кривых в пространстве.

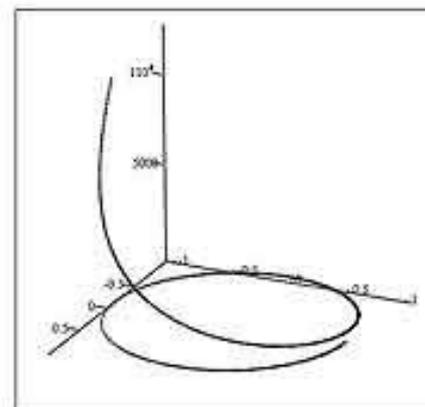
Раданная в векторном виде функция F задается как функция одной переменной tgrid, причем параметры t0 и t1 устанавливают пределы ее изменения, а tmar - число линий сетки. Для построения графика используется шаблон типа **Scatter Plot** (шаблон для графика в виде точек (фигур) в трехмерном пространстве).

Для того, чтобы получить график кривой, а не поверхности, нужно включить в свойствах графика тип Scatter Plot или Data Points; также для удобства просмотра получившихся результатов желательно включить отрисовку не только точек, но и целых линий.



$$F(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$$

C



CreateSpace(F, 0, 3.14, 500)

Построение объемных фигур с помощью функции *Polyhedron*

Функция для построения объемных фигур полиэдров:

Polyhedron("name"),

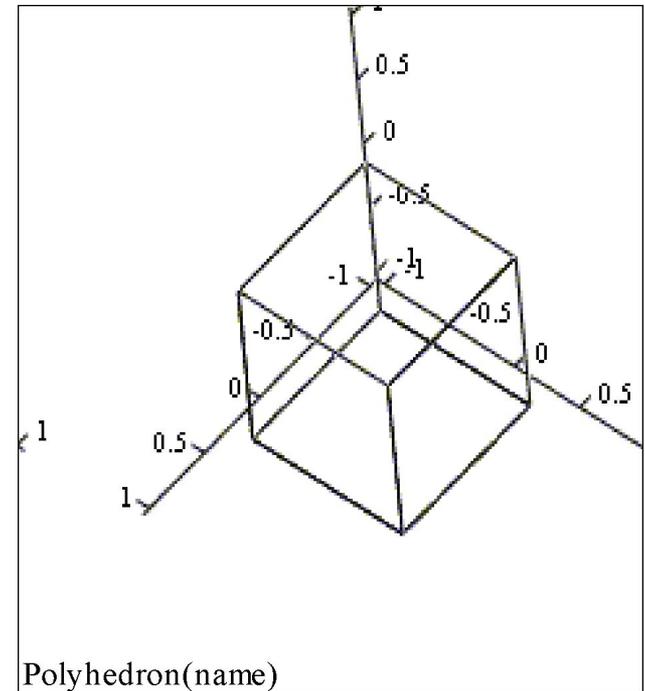
где name - имя фигуры.

Имя ряда фигур можно задавать в виде "#N", где N – номер фигуры.

Name:="cube"

Построенная фигура может форматироваться как и другие графики поверхности, а также вращаться, приближаться и удаляться с помощью мыши.

Name:="cube"



Пример построения куба

Функция задания полиэдров

PolyLookup

Для описания произвольных полиэдров в Mathcad Professional служит функция PolyLookup, которую можно задать одним из следующих способов:

PolyLookup(“имя”)

PolyLookup(“#N”)

PolyLookup(“Описатель”).

Аргументом функции является строка с именем, номером фигуры или с ее описателем в случае создания составных полиэдров. Всего в таблице имеется около 60 полиэдров.

Большое число примеров применения функции PolyLookup можно найти в справочной системе *Matchad* – раздел Polyhedra таблиц Reference Table.

