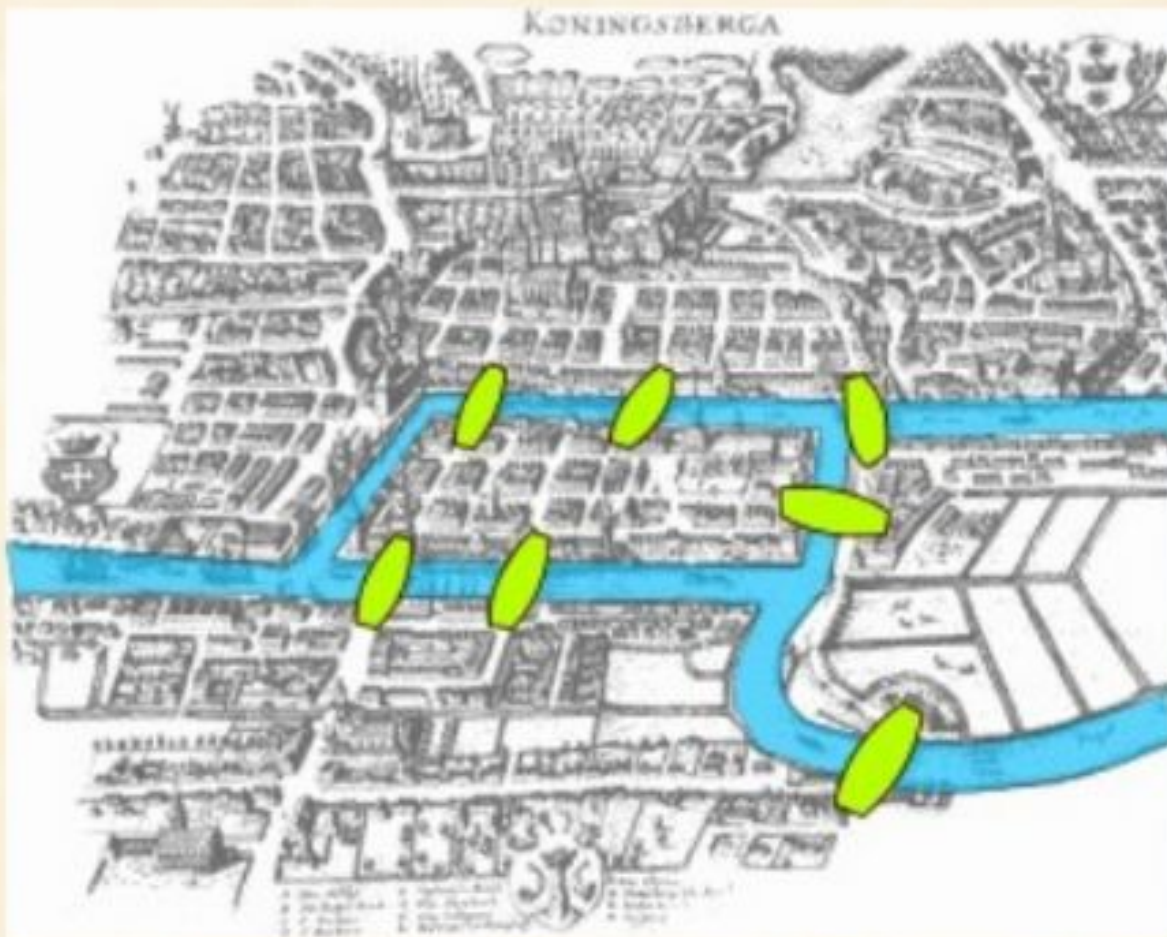




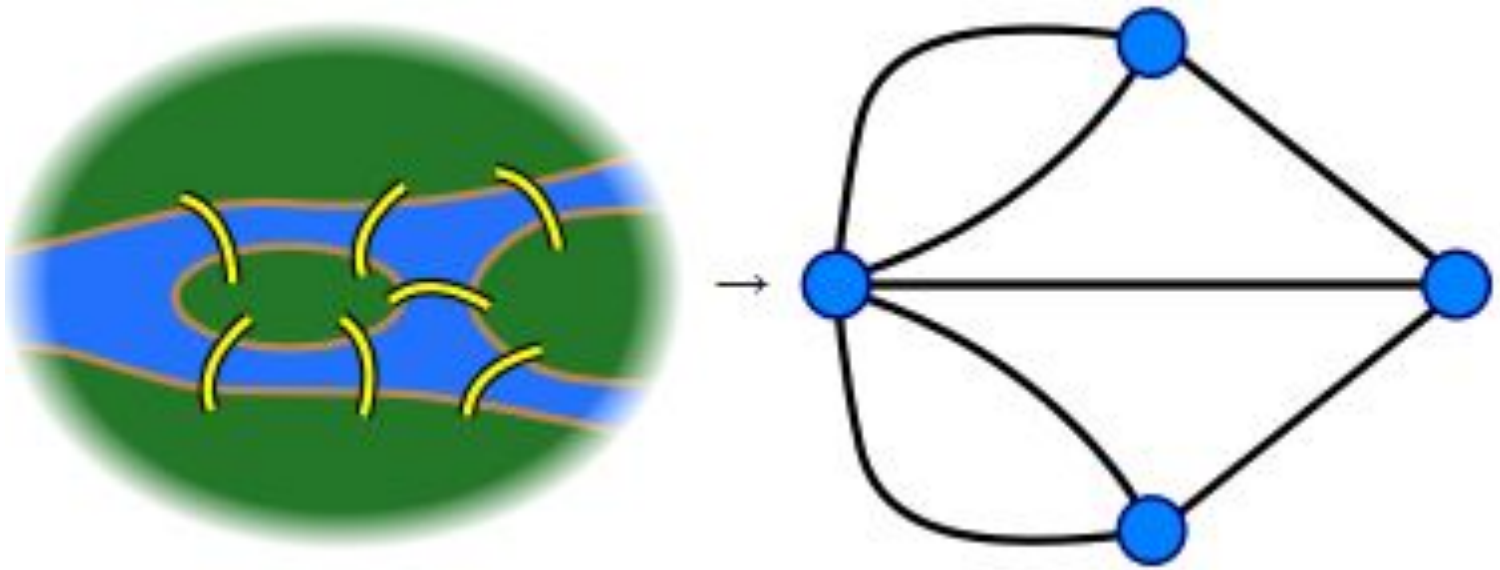
Лекція 6.

Графи.

Схема Кенігсберзьких мостів



Місто
Кенігсберг
(сьогодні
Калінінград) в
Пруссії
розташоване
на річці
Преголя і
включає два
великі
острови, які
були
пов'язані
один з одним
і з материком
сімома
мостами.



Необхідно було знайти такий маршрут через місто, щоб пройти всі сім мостів і кожним мостом пройти рівно один раз. На острів не можна було потрапити інакше як через міст, і кожен з мостів мав бути пройденим за один раз (тобто не можна було пройти на середину мосту і повернутися назад, а потім з іншого берега пройти другу половину). Ейлер довів, що розв'язку **не** існує.

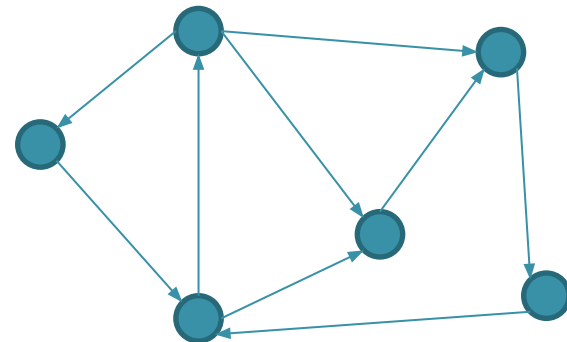
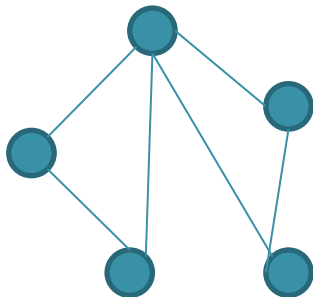
§1. Графи. Основні поняття і визначення

Граф $G=(V,E)$ – це сукупність непорожньої множини *вершин* V та множини *ребер* E .

$$|V| = n, |E| = m$$

Орієнтований граф (орграф) - це граф, ребра якого мають напрям.

Ребра орграфа називаються **дугами**.



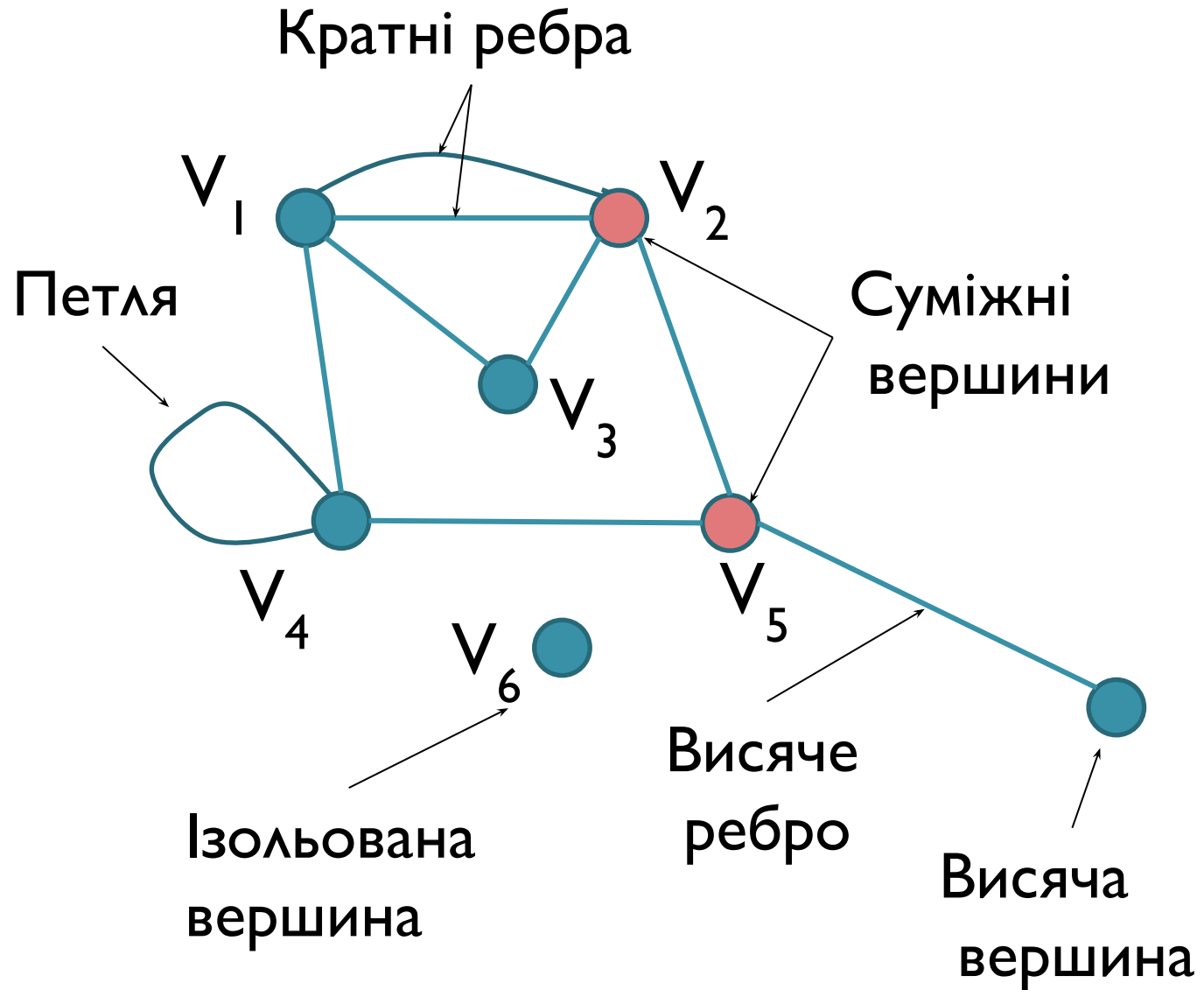
За наочного подавання графа вершини зображуються **точками**, ребра – **лініями**, які з'єднують точки.

Кількість ребер, інцидентних до певної вершини x , називається **степенем** цієї вершини і позначається $d(x)$.

Вершина, в якій степінь дорівнює 0, називається **ізолюваною**. Вершини, які мають степінь 1, називаються **висячими**, або **кінцевими**.

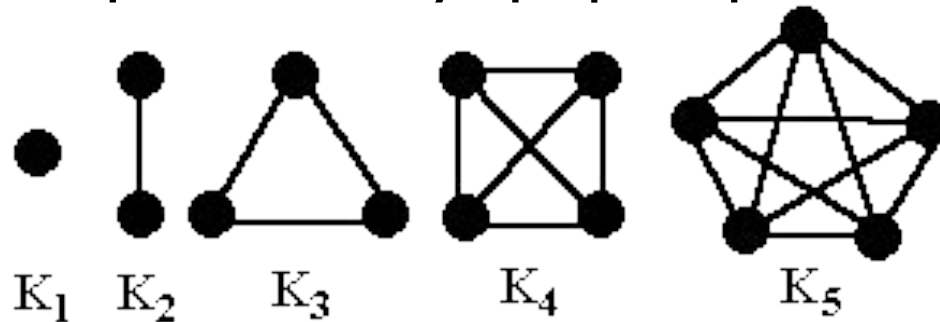
Петлями називають ребра, які мають збіжні кінці.

Граф, який не має ребер ($U = \emptyset$), називається **порожнім**. Усі вершини порожнього графа є **ізолювані**.

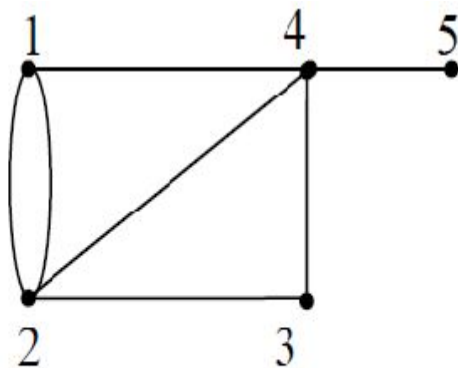


Звичайний граф з n вершинами, будь-яка пара вершин якого з'єднана ребром, називається **повним** і позначається K_n .

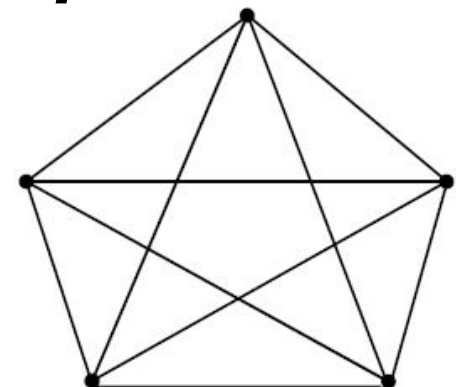
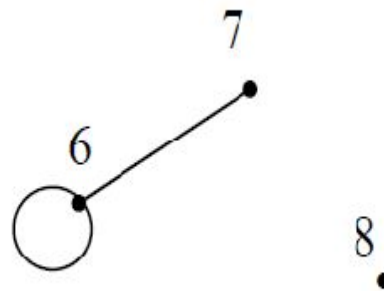
Кількість ребер в повному графі дорівнює $m = \frac{n(n-1)}{2}$



Граф, який може бути зображено на площині (без перетину ребер), називається **планарним**.



Планарний граф



Непланарний граф

Теорема 1. Сума степенів усіх вершин графа дорівнює подвоєній кількості ребер.

Д о в е д е н н я

Кожне ребро двічі входить до суми, звідки й випливає твердження.

Теорема 2. У кожному графі число вершин, які мають непарний степінь, є парне.

Д о в е д е н н я

Нехай $X_1 \subseteq X$ – множина вершин непарного степеня; $X_2 \subseteq X$ – множина вершин парного степеня. Зазначимо, що $X = X_1 \cup X_2$; $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in X_1} d(x) + \sum_{x \in X_2} d(x) \rightarrow \sum_{x \in X_1} d(x) = \sum_{x \in X} d(x) - \sum_{x \in X_2} d(x)$$

Вочевидь, що $\sum_{x \in X_2} d(x)$ є парна як сума парних чисел, $\sum_{x \in X} d(x)$ – парна відповідно до теореми 1. Отже, $\sum_{x \in X_1} d(x)$ – парна.

● **Насиченість графа D** визначається:

$$D = \frac{2m}{n(n-1)}.$$

Для повного графа $D=1$.

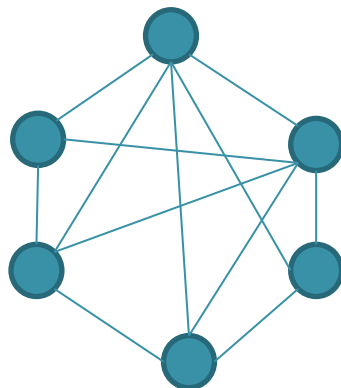
Насичений граф – це граф, в якому кількість ребер наближається до максимально можливої:

$$|E| = O(|V|^2).$$

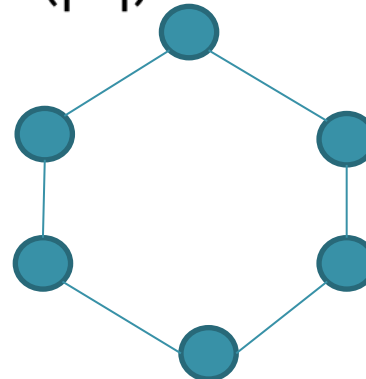
Розріджений граф – це граф, в якому кількість ребер наближається до кількості вершин:

$$|E| = O(|V|).$$

Насичений
граф



$$D = \frac{2 * 12}{6 * 5} = 0,8 > 0,5$$



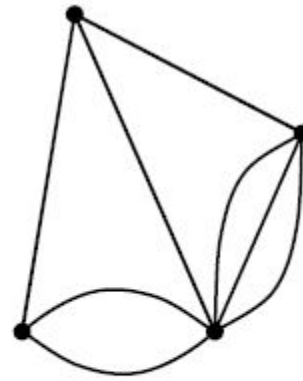
Розріджений
граф

$$D = \frac{2 * 6}{6 * 5} = 0,4 < 0,5$$

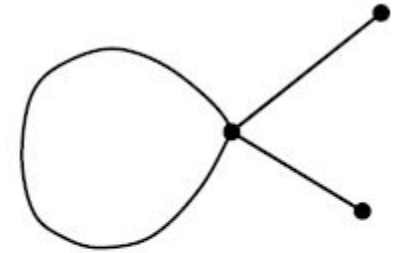
Мультиграф –
це граф із
кратними
ребрами.

Псевдограф –
це граф з
петлями.

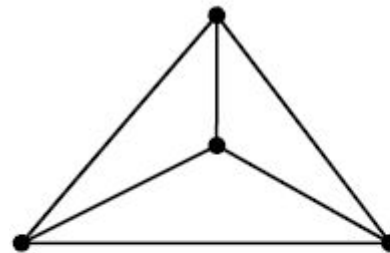
Граф, що не
містить петель і
кратних ребер,
називається
звичайним,
або **простим**
графом.



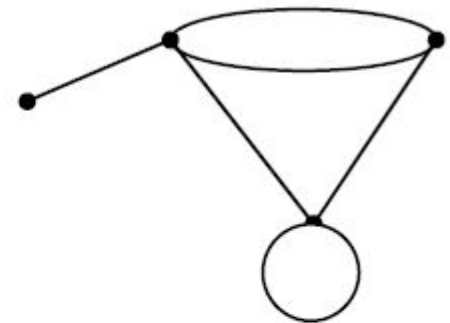
Мультиграф



Граф з петлею

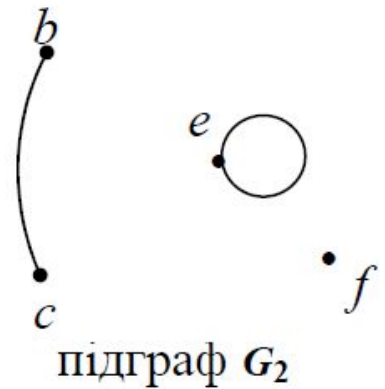
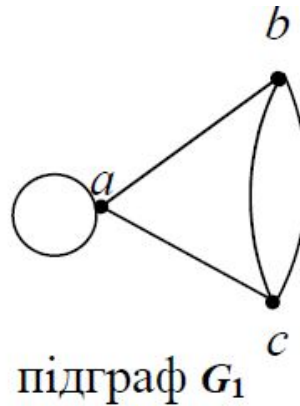
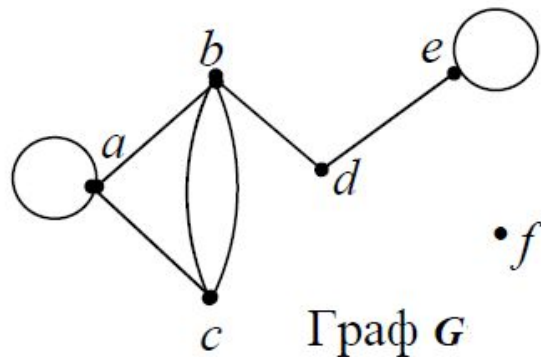


Простий граф

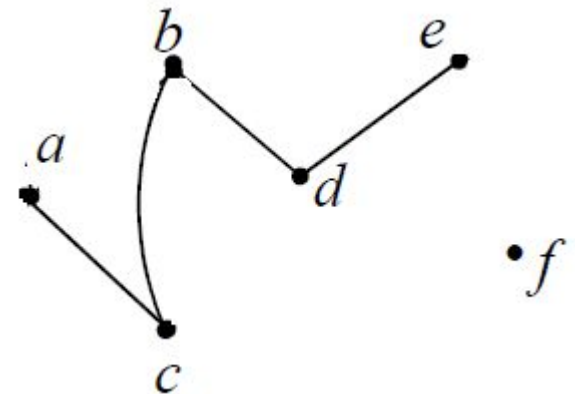
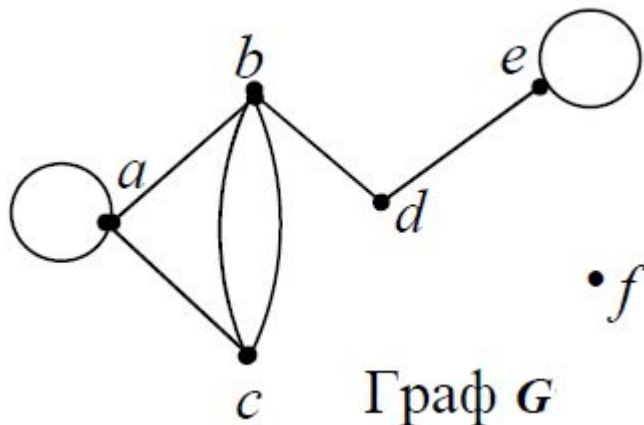


Псевдограф

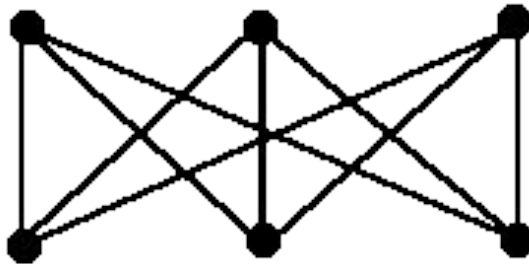
Підграфом графа $G=(X,V)$ називають граф $G'=(X_1,V_1)$, для якого $x_1 \subset X$, $v_1 \subset V$. Підграф називають **власним**, якщо він відмінний від самого



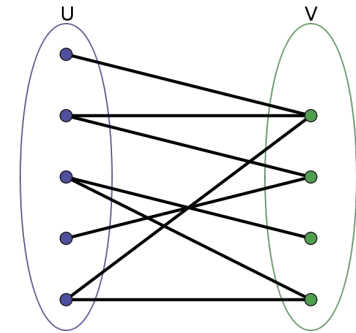
Граф $G''=(X'',V'')$ називається **ОСТОВНИМ підграфом** графа $G=(X,V)$, якщо $X''=X$ та $V'' \subseteq V$.



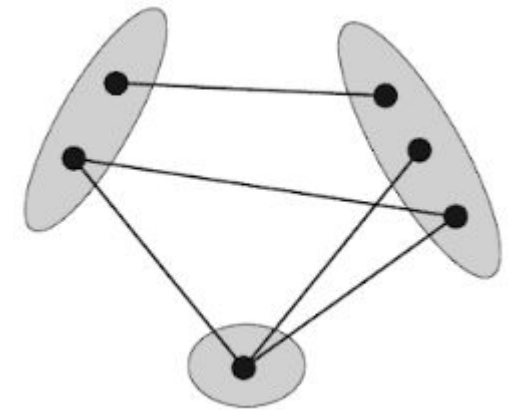
Граф, вершини якого можна розбити на непересічні підмножини V_1 і V_2 так, що ніякі дві вершини, що належать тій самій підмножині, не суміжні, називається **ДВОДОЛЬНИМ** (графом Кеніга) і позначається B_{mn} ($m=|V_1|$, $n=|V_2|$, $m+n=|V|$).



B_{33}

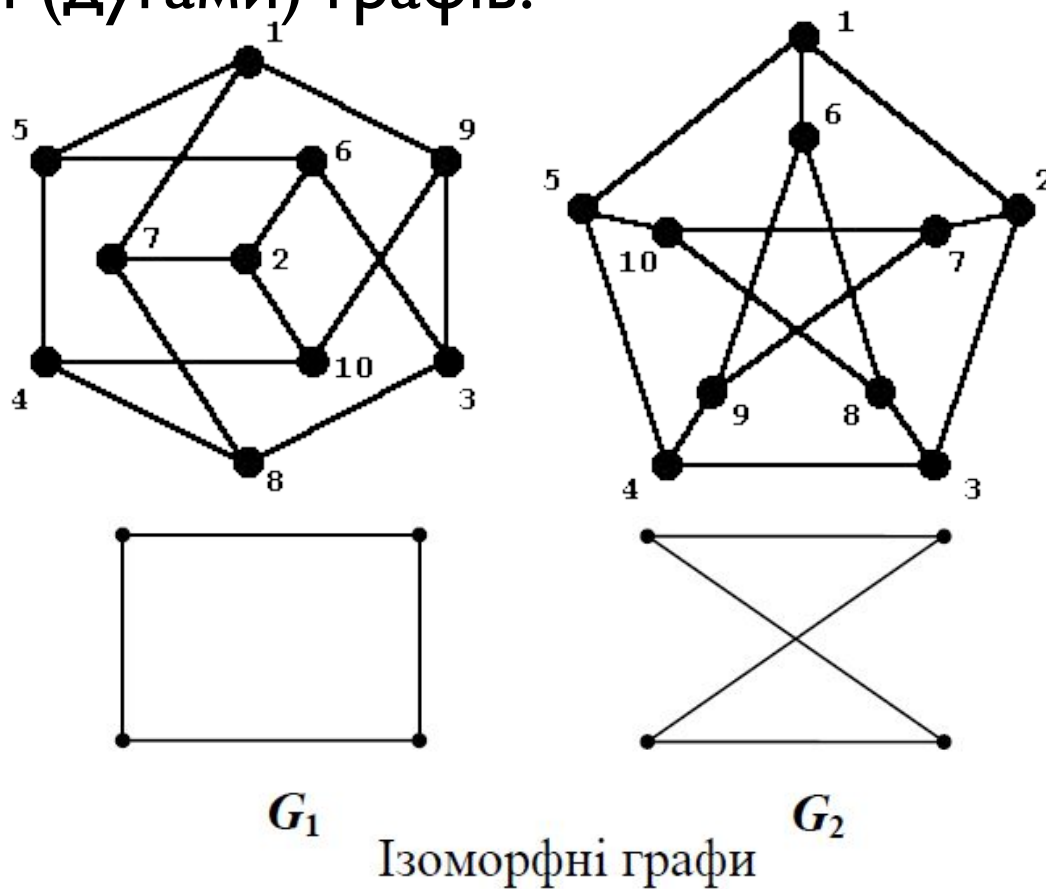


Граф, вершини якого можна розбити на n непересічних підмножини так, що ніякі дві вершини, що належать одній підмножині, не суміжні, називається **n -ДОЛЬНИМ**.



Тридольний граф

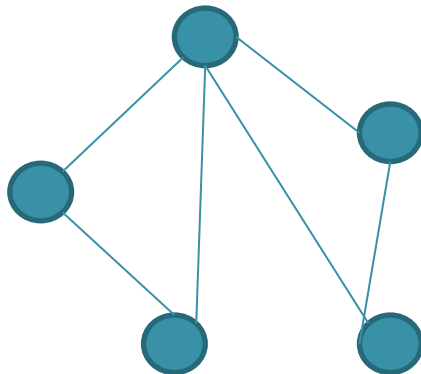
Графи $G_1=(V_1,E_1)$ і $G_2=(V_2,E_2)$ називаються **ізоморфними** (позначення: $G_1 \sim G_2$), якщо між графами існує взаємо-однозначне відображення $j: G_1 \rightarrow G_2$ ($V_1 \rightarrow V_2, E_1 \rightarrow E_2$), що зберігає відповідність між ребрами (дугами) графів.



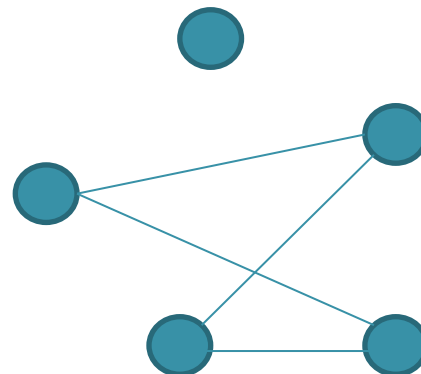
§2 Унарні операції над графами

І. Доповнення.

Доповненням графа $G = (X, V)$ називають граф $\bar{G} = (X, V')$, якщо його ребро (x_i, x_j) входить в V' тоді і тільки тоді, коли воно не входить в V . Іншими словами, дві вершини x_i і x_j суміжні в $\bar{G}$, якщо вони не суміжні в G .



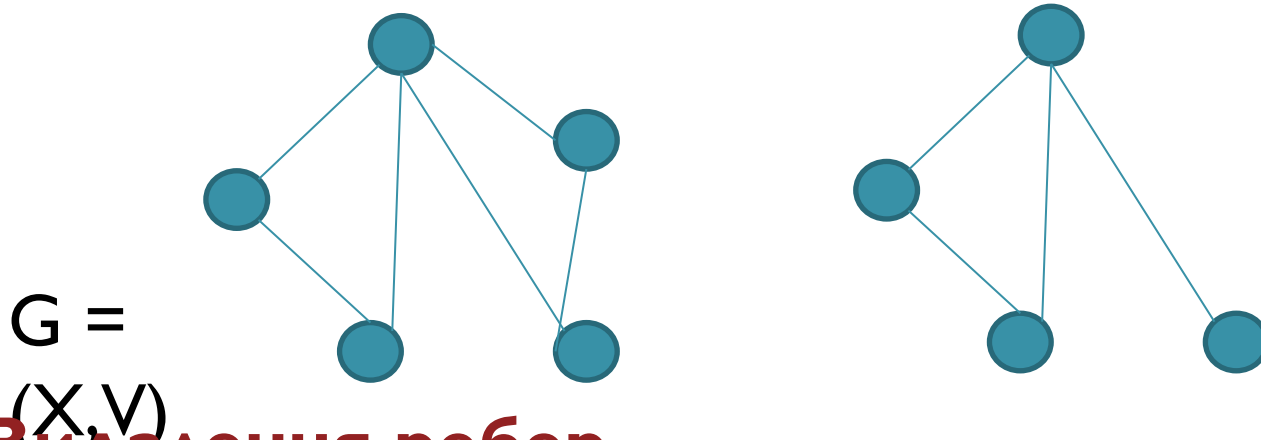
$G =$
 (X, V)



$\bar{G} = (X, V')$

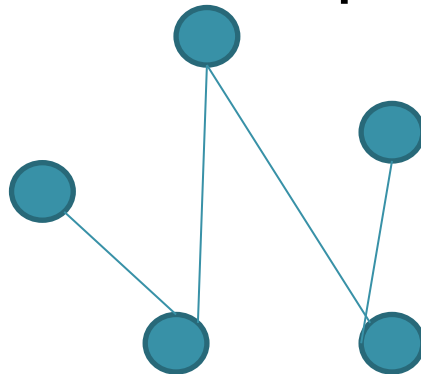
2. Видалення вершини.

Нехай x_i – вершина графа $G = (X, V)$. $G - x_i$ – граф, що отриманий видаленням з графа G вершини x_i та ребер інцидентних цій вершині.



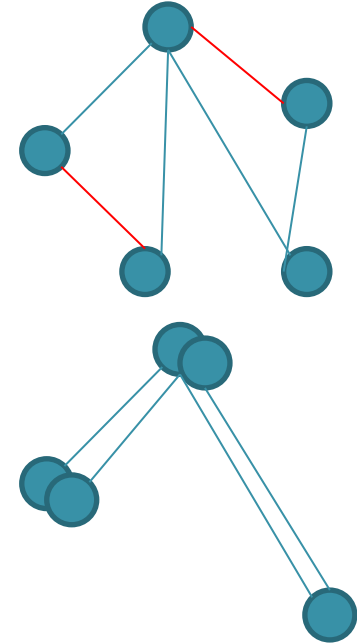
3. Видалення ребер.

Нехай li – ребро графу $G = (X, V)$. Тоді $G - (li)$ – підграф графу G , який отримано після викидання ребра li .



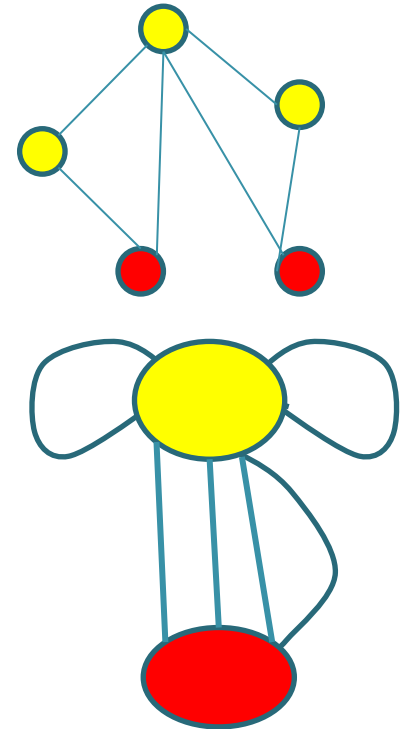
4. Стягування.

Стягування — операція видалення ребра і ототожнювання його кінцевих вершин. Граф G називають стягненим до графу H , якщо H можна отримати з G послідовністю стягувань.



5. Замкнення або ототожнювання.

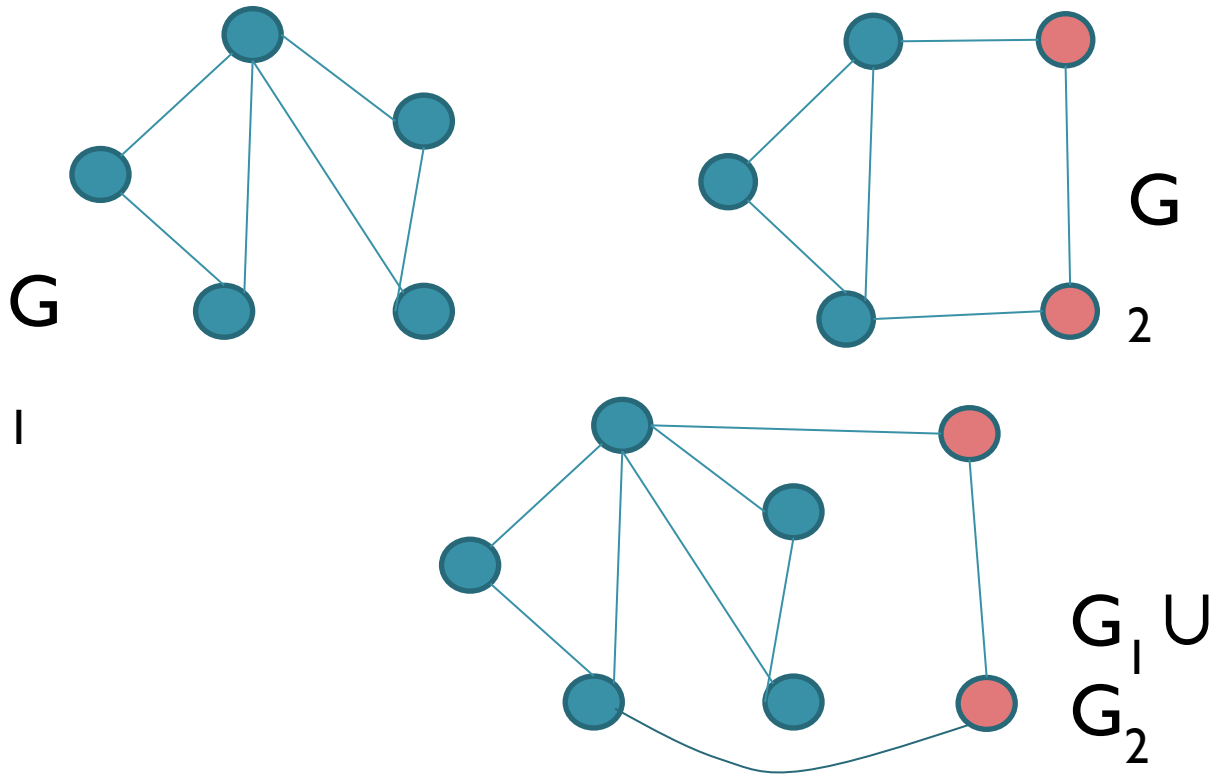
Кажуть, що пара вершин графу G x_i та x_j замикаються (ототожнюються), якщо вони замінюються новою вершиною, всі ребра графу G інцидентні x_i та x_j , стають інцидентними новій вершині.



§3 Бінарні операції над графами

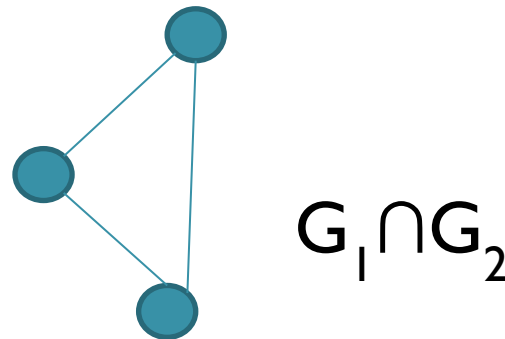
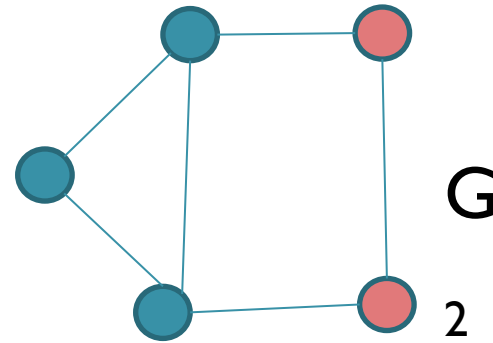
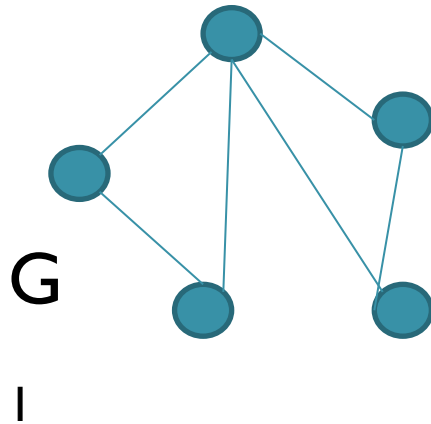
І. Об'єднання графів.

Об'єднанням графів G_1 та G_2 , позначається $G_1 \cup G_2$, є граф $G_3 = (X_1 \cup X_2, V_1 \cup V_2)$ множина його вершин є об'єднанням X_1 та X_2 , а множина його ребер є об'єднанням V_1 та V_2 .



2. Перетин

Перетином графів G_1 та G_2 , позначається $G_1 \cap G_2$ є граф $G_3 = (X_1 \cap X_2, V_1 \cap V_2)$, тобто множина його вершин складається лише з тих вершин, які є одночасно в G_1 та G_2 , а множина ребер G_3 складається з ребер, які одночасно присутні в G_1 та G_2 .



3. Кільцева сума

Кільцева сума двох графів G_1 та G_2 позначається $G_1 \oplus G_2$, являє собою граф G_3 , який складається з ребер, що присутні або в G_1 , або в G_2 , але не в обох одночасно.

