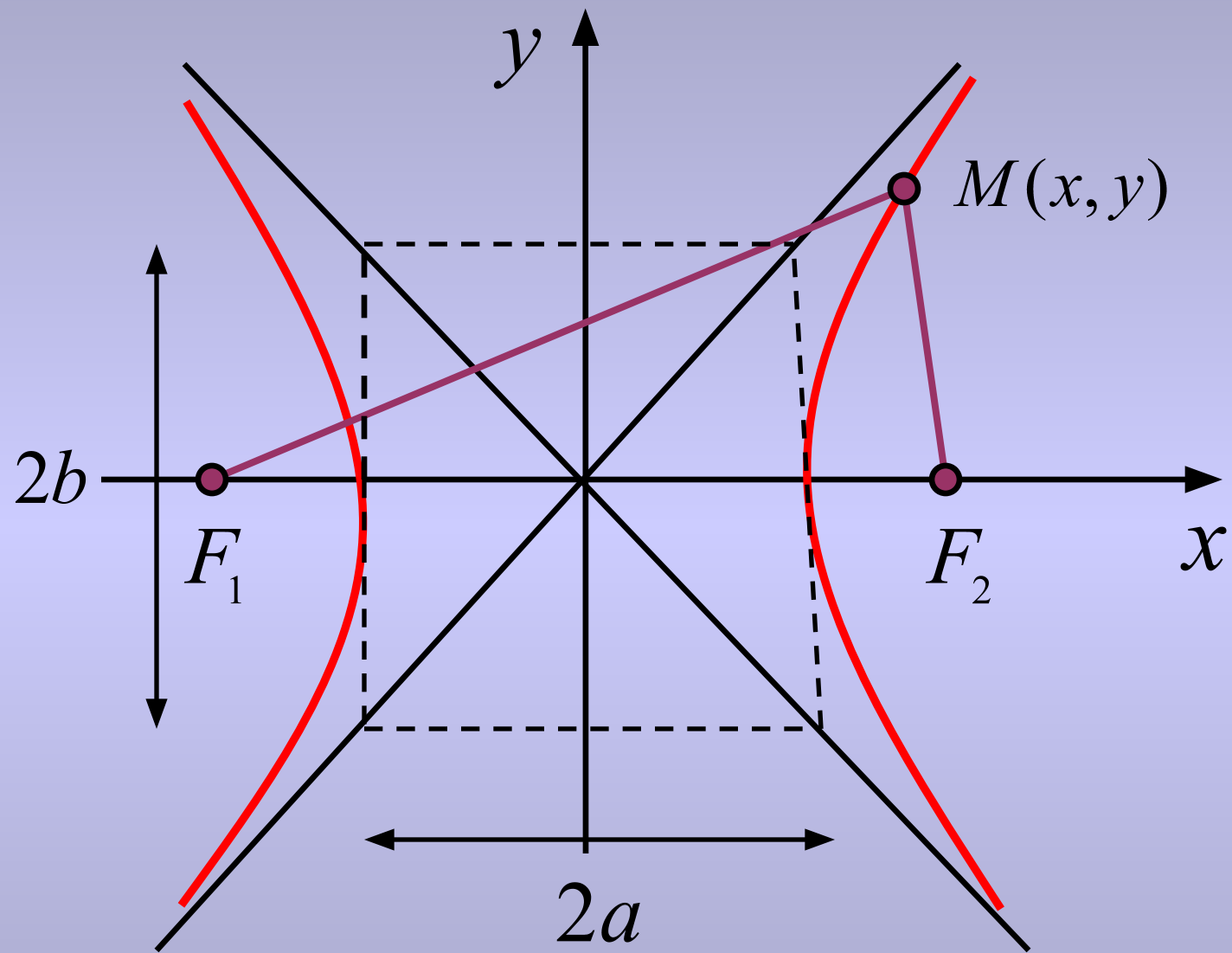


4.4. ГИПЕРБОЛА

ГИПЕРБОЛОЙ называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (меньшая, чем расстояние между фокусами)



Введем обозначения:

$$F_1(c;0) \quad F_2(-c;0)$$

$$|F_1 F_2| = 2c$$

a – действительная полуось гиперболы

b – мнимая полуось гиперболы

Для любой точки $M(x,y)$, принадлежащей гиперболе, по определению выполняется равенство:

$$|F_1 M - M F_2| = 2a$$

Прямые, проходящие через начало координат и имеющие угловые коэффициенты

$$\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad -\frac{b}{a}$$

называются асимптотами гиперболы.

Асимптоты делят плоскость на 4 области, в двух из которых расположена гипербола.

Точки гиперболы по мере удаления от оси у приближаются к асимптотам, т.е. расстояние между точками гиперболы и асимптотой при увеличении x уменьшается и стремится к нулю.

ТЕОРЕМА

Для того, чтобы точка $M(x,y)$ принадлежала гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



где $b^2 = c^2 - a^2$

Покажем, что координаты точки, принадлежащей гиперболе, удовлетворяют уравнению (2).

Т.к. точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе, то по определению гиперболы, должно выполняться условие

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

Выразим каждое расстояние по формуле расстояния между двумя точками:

$$\left. \begin{array}{l} F_1(-c;0) \\ M(x;y) \end{array} \right\} \rightarrow |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} F_2(c;0) \\ M(x;y) \end{array} \right\} \rightarrow |F_2 M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Тогда:

$$|F_1 M - F_2 M| = \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Возводим в квадрат обе части выражения:

$$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2}$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

Возводим в еще раз квадрат:

$$a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2 = a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2 \underbrace{(c^2 - a^2)}_{b^2} - a^2y^2 = a^2 \underbrace{(c^2 - a^2)}_{b^2}$$

Делим все выражение на a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

каноническое уравнение гиперболы

*Отношение фокусного расстояния к
длине действительной оси гиперболы
называется
ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ*

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Для гиперболы $c > a$

$$\rightarrow \varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

Следовательно, для гиперболы $\varepsilon > 1$

Чем меньше отношение мнимой и действительной полуосей, тем меньше эксцентриситет и тем более гипербола будет прижата к оси x , и наоборот.