

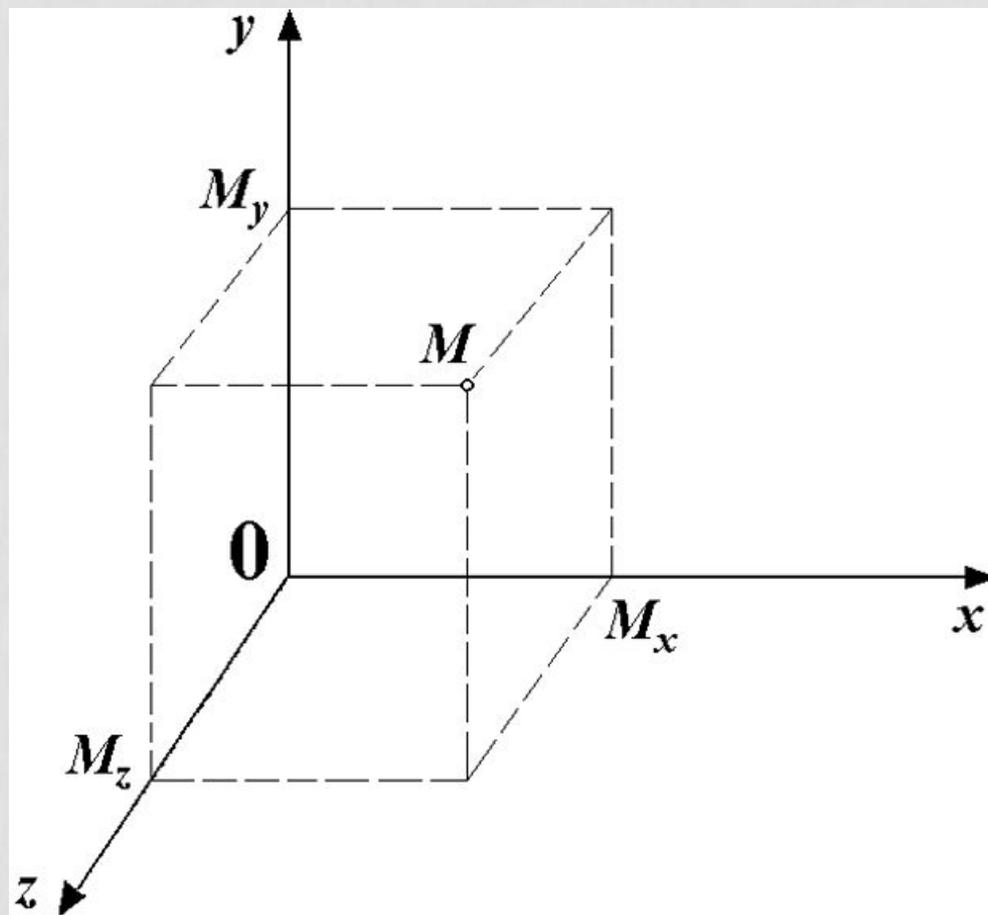
ГЕОМЕТРИЯ В 3D- ПРОСТРАНСТВЕ

ЛЕКЦИЯ 4

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ

- В трехмерном пространстве положение каждой точки задается набором из 3 вещественных чисел – координат точки
- Так же, как и в двумерном случае, самыми распространенными являются декартова и полярная системы координат
- Декартовы координаты точки x, y, z – это проекции точки на оси абсцисс (Ox), ординат (Oy) и аппликат (Oz)

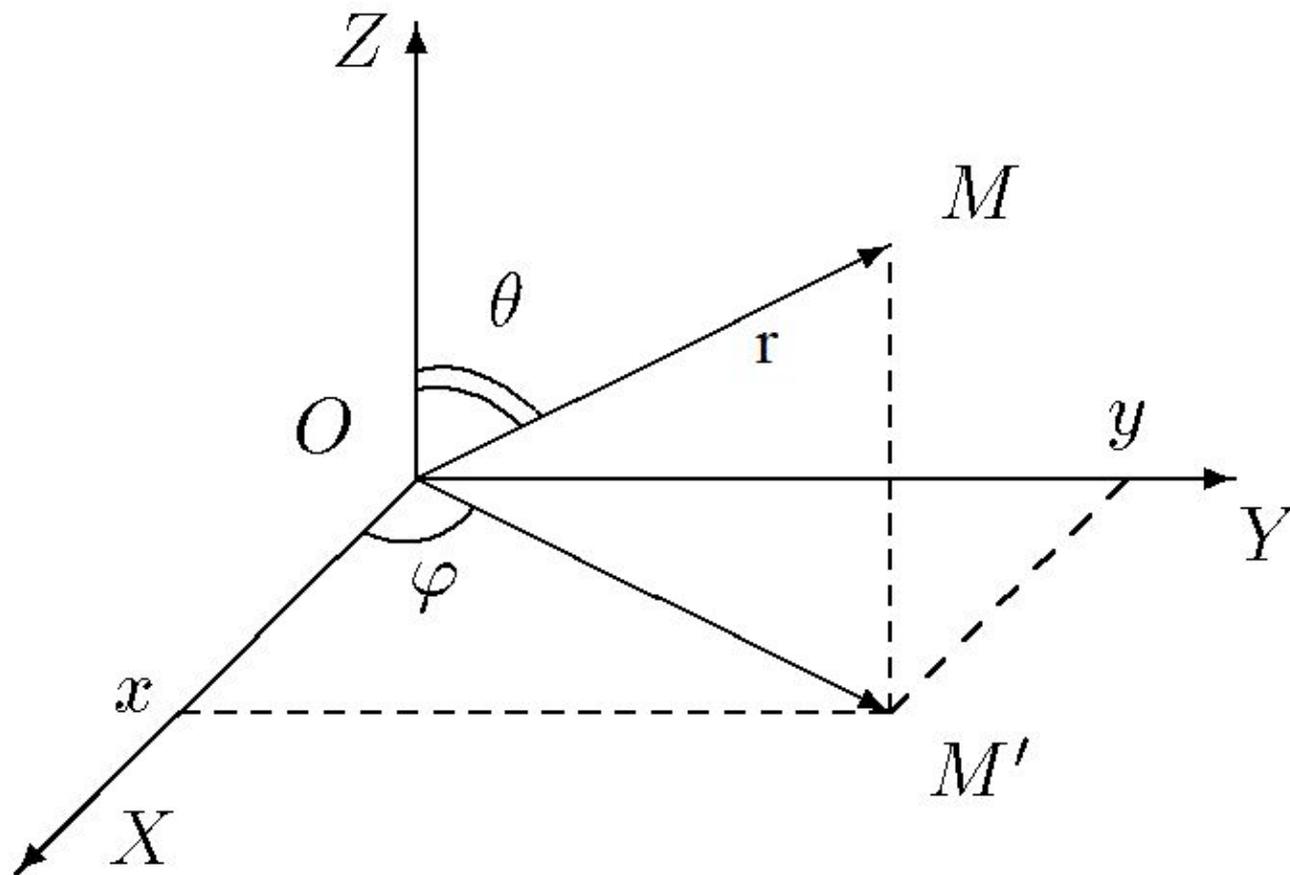
ДЕКАРТОВА СК



СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

- ❑ Сферические координаты являются обобщением полярных координат на случай трехмерного пространства, получаемого путем добавления еще одного координатного угла
- ❑ Сферические координаты точки r , θ , φ проще всего ввести, используя декартову систему координат
- ❑ В этом случае они имеют следующий смысл:
 - r – длина радиус-вектора точки (расстояние до нее от начала координат),
 - θ – полярный угол (угол, образованный радиус-вектором точки с осью OZ),
 - φ – азимутальный угол (угол, образованный проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY с осью OX)

СФЕРИЧЕСКАЯ СК



ВЗАИМОСВЯЗЬ ДЕКАРТОВЫХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

- Декартовы координаты следующим образом выражаются через полярные:

$$x = r \times \sin(\theta) \times \cos(\varphi)$$

$$y = r \times \sin(\theta) \times \sin(\varphi)$$

$$z = r \times \cos(\theta)$$

- Соответственно, полярные координаты можно выразить через декартовы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos \theta = z/r, \quad \tan \varphi = y/x$$

ОБЪЕКТЫ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

- Для объектов конечных размеров необходимо указывать не только их положение, но и ориентацию в пространстве
- Как и в двумерном случае с объектом связывают объектную систему координат, оси которой задают ориентацию объекта в пространстве
- В отличие от случая плоского двумерного пространства в трехмерном пространстве ориентация объектной системы координат относительно мировой системы задается двумя углами – полярным и азимутальным

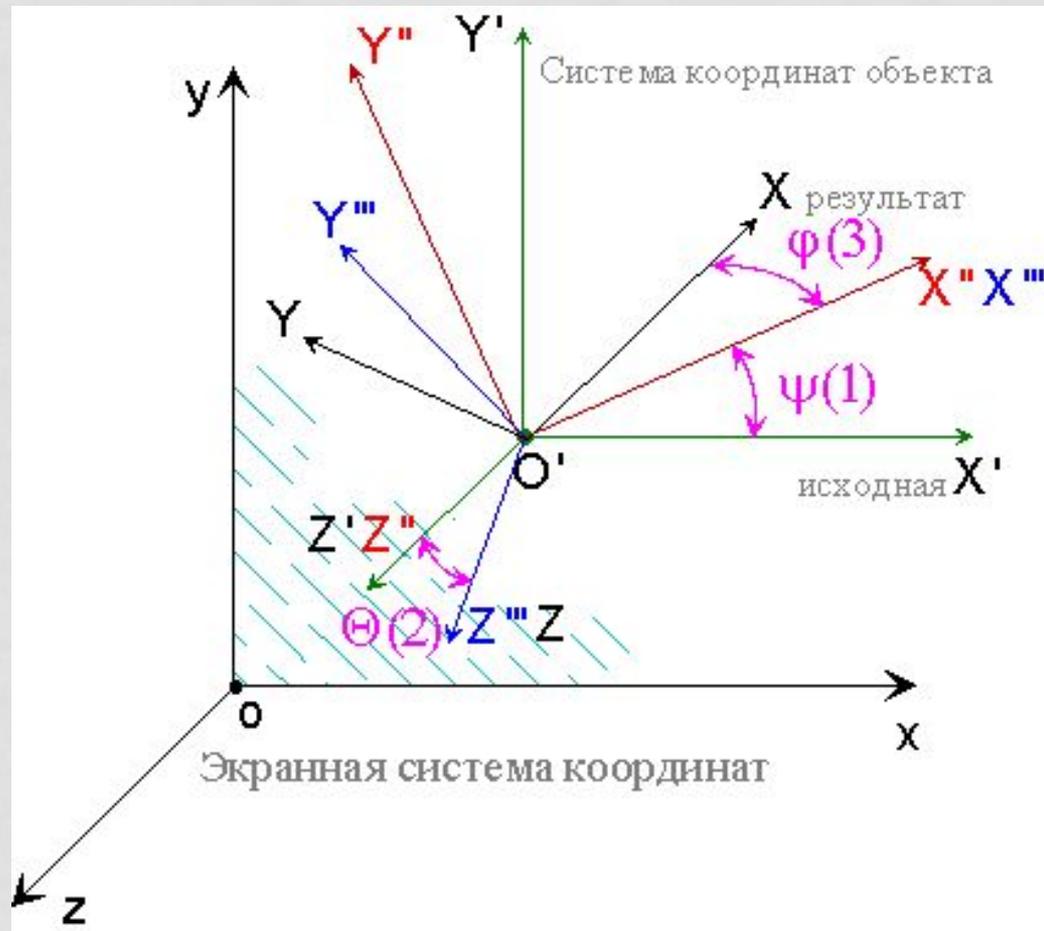
ПОВОРОТ ОБЪЕКТНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

- Любой поворот в трехмерном пространстве может быть выполнен как последовательность 3-х поворотов, причем существуют различные способы выбора таких поворотов
- Рассмотрим способ, предложенный Леонардом Эйлером, предложившим соответствующий набор углов поворота – *эйлеровых углов*
- Пусть объектная система координат находится в некотором исходном положении, характеризуемом направлениями координатных осей X', Y', Z'
- Требуется выполнить ее поворот и перевести в конечное положение X, Y, Z

ЭЙЛЕРОВЫ УГЛЫ

- Согласно Эйлеру для этого необходимо выполнить следующую последовательность поворотов
 - поворот вокруг оси Z' на угол ψ , называемый *углом прецессии*, такой, чтобы ось абсцисс совпала с нормалью к плоскости ZZ' ; оси абсцисс и ординат переходят в положения X'' и Y'' , соответственно, причем X'' оказывается в плоскости XOY
 - поворот вокруг оси X'' на угол θ , называемый *углом нутации*, такой, чтобы ось Z' совпала с осью Z ; при этом ось ординат также оказывается в плоскости XOY и занимает положение Y'''
 - поворот вокруг оси Z на угол ϕ , называемый *углом собственного вращения*, такой, что оси абсцисс и ординат совпали с осями X и Y , соответственно

ПОВОРОТ ОБЪЕКТНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ



ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

$$\begin{aligned} X &= (\cos \mu' \cdot \cos \mu'' - \sin \mu' \cdot \cos \theta' \cdot \sin \mu'') x + (-\cos \mu' \cdot \sin \mu'' - \sin \mu' \cdot \cos \theta' \cdot \cos \mu'') y + (\sin \mu' \cdot \sin \theta') z \\ Y &= (\sin \mu' \cdot \cos \mu'' + \cos \mu' \cdot \cos \theta' \cdot \sin \mu'') x + (-\sin \mu' \cdot \sin \mu'' + \cos \mu' \cdot \cos \theta' \cdot \cos \mu'') y + (-\cos \mu' \cdot \sin \theta') z \\ Z &= (\sin \theta' \cdot \sin \mu'') x + (\sin \theta' \cdot \cos \mu'') y + (\cos \theta') z \end{aligned}$$

АЛГОРИТМЫ ПРОЕКЦИРОВАНИЯ

ЗАДАЧА ПРОЕЦИРОВАНИЯ

- Отображение некоторого множества точек S пространства R^n на другое пространство R^m той же или меньшей размерности называется проецированием S на R^m , а полученный образ - проекцией S
- Частным случаем проецирования является изображение трехмерного объекта на плоскости.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ

- Для построения проекции выбирается некоторая точка – центр проецирования – и плоскость проецирования или картинная плоскость. Из центра проецирования через каждую точку P изображаемого объекта проводится луч, пересечение которого с картинной плоскостью является проекцией P' этой точки на плоскость.

ВИДЫ ПРОЕКЦИЙ

- Если в качестве центра проецирования выбирается собственная точка пространства \mathbb{R}^3 , то проекция называется *центральной (перспективной)*, а проецирующий пучок лучей является расходящимся.
- Если же центром проецирования является несобственная точка, лучи проецирующего пучка параллельны и проекция называется *параллельной*.

ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

- В зависимости от расположения картинной плоскости и координатных осей мировой системы координат параллельные проекции делятся на
 - *ортографические,*
 - *аксонометрические,*
 - *косоугольные*

ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Картинная плоскость совпадает с одной из координатных плоскостей или параллельна ей.

Матрица проецирования вдоль оси X на плоскость YZ имеет вид:

$$P_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

- В случае, если картинная плоскость параллельна плоскости YZ , матрица проецирования умножается на матрицу параллельного сдвига вдоль оси X .

$$P_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

□ Аналогичным образом могут быть получены матрицы проецирования вдоль двух других координатных осей:

$$P_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix}$$

ВЫРОЖДЕННОСТЬ МАТРИЦ

- Матрицы проецирования являются вырожденными, т.е. проецирование является необратимой операцией
- Это отражает тот очевидный факт, что любое проецирование связано с потерей части информации об объекте, так что полное восстановление объекта по его единственной проекции невозможно

АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

- При аксонометрической проекции проектирующие прямые перпендикулярны картинной плоскости. В соответствии со взаимным расположением картинной плоскости и координатных осей МСК различают три вида аксонометрических проекций.

ВИДЫ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

- *Триметрическая проекция* – нормальный вектор картинной плоскости образует с оортами координатных осей попарно различные углы.
- *Диметрическая проекция* – два из трех указанных углов равны.
- *Изометрическая проекция* – все углы равны.

ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

- Любая аксонометрическая проекция может быть получена комбинацией поворота до совмещения нормали к картинной плоскости с одной из координатных осей МСК и последующего ортогографического проецирования:

$$M=R*P$$

ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

При повороте на угол Ψ вокруг оси Y , повороте на угол φ вокруг оси X и последующем проецировании вдоль оси Z матрица преобразования имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \varphi * \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & 0 \\ \sin \psi & -\sin \varphi * \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

- Эта матрица получается в результате перемножения трех матриц – R_y , R_x и P_z :

$$M = R_y * R_x * P_z$$

ТРИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

□ При таком проецировании единичные орты координатных осей преобразуются следующим образом:

$$\mathbf{e}_x * M = (1 \ 0 \ 0 \ 1) * M = (\cos\psi, \sin\varphi * \sin\psi, 0, 1)$$

$$\mathbf{e}_y * M = (0 \ 1 \ 0 \ 1) * M = (0, \cos\varphi, 0, 1)$$

$$\mathbf{e}_z * M = (0 \ 0 \ 1 \ 1) * M = (\sin\psi, -\sin\varphi * \cos\psi, 0, 1)$$

ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- Равенство углов между нормалью к картинной плоскости и двумя координатными осями означает равенство проекций соответствующих ортов
- Например, равенство углов нормали с осями абсцисс и ординат означает, что:

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \varphi * \sin^2 \psi = \cos^2 \varphi$$

ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

□ Отсюда следует, что

$$\sin^2 \psi = \operatorname{tg}^2 \varphi$$

- Теперь углы поворота вокруг осей ординат и абсцисс уже не являются независимыми и задание одного из них определяет возможные значения другого угла
- Так, для $\psi = \pi/4$ угол φ может иметь значения, равные $\pm \operatorname{arctg} (\sqrt{1/2})$

ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- Аналогичным образом могут быть рассмотрены две другие диметрические проекции, соответствующие другим возможным выборам пар равных углов
- Вводится понятие стандартной диметрической проекции, при которой длины проекций единичных ортов на картинную плоскость находятся в отношении $2 : 2 : 1$

СТАНДАРТНАЯ ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

□ Тогда из условий

$$\sin^2 \psi = \operatorname{tg}^2 \varphi$$

и

$$\cos^2 \varphi = 4 * (\sin^2 \psi + \sin^2 \varphi * \cos^2 \psi)$$

получим

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 1/8,$$

что приблизительно соответствует углам

$$\varphi = \pm 19,5^\circ \text{ и } \psi = \pm 20,7^\circ$$

СТАНДАРТНАЯ ДИМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

□ В случае, когда единичный вектор нормали к картинной плоскости лежит в 1-м октанте, $\varphi > 0$ и $\psi < 0$ и матрица диметрического проецирования равна:

$$M = \begin{pmatrix} 0,935 & -0,118 & 0 & 0 \\ 0 & 0,943 & 0 & 0 \\ -0,354 & -0,312 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- В этом случае все три проекции единичных ортов равны между собой, что приводит к равенствам:

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \varphi * \sin^2 \psi = \cos^2 \varphi$$

$$\sin^2 \psi + \sin^2 \varphi * \cos^2 \psi = \cos^2 \varphi$$

- Откуда следует, что

$$\sin^2 \varphi = 1/3, \sin^2 \psi = 1/2.$$

СТАНДАРТНАЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

- Соответствует выбору $\psi = \pi/4$
- В этом случае матрица проецирования принимает вид:

$$M = \begin{pmatrix} 0,707 & -0,408 & 0 & 0 \\ 0 & 0,816 & 0 & 0 \\ -0,707 & -0,408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

КОСОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

- При косоугольном проецировании пучок проецирующих лучей не перпендикулярен картинной плоскости. Косоугольные проекции сочетают в себе свойства ортографических и аксонометрических проекций.
- При косоугольном проектировании орта \mathbf{e}_z на плоскость XU имеем:

$$(0, 0, 1, 1) \rightarrow (\alpha, \beta, 0, 1)$$

КОСОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Матрица соответствующего преобразования имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ВИДЫ КОСОУГОЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

- Выделяют два вида косоугольных проекций:
 - свободную,
 - кабинетную.
- В случае свободной проекции угол наклона проецирующего пучка к картинной плоскости равен $\pi/4$ и, соответственно

$$\alpha = \beta = \cos \pi/4.$$

ВИДЫ КОСОУГОЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

- Кабинетная проекция является частным случаем свободной проекции – масштаб по оси Z вдвое меньше. Тогда

$$\alpha = \beta = 0,5 * \cos \pi/4.$$

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

□ Пусть центр проецирования – точка S с координатами $(0, 0, c)$ на оси Z и картинная плоскость совпадает с координатной плоскостью XOY . Тогда уравнение прямой, проходящей через точку S и произвольную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ будет иметь вид:

$$x = x_0 * t; \quad y = y_0 * t; \quad z = c + (z_0 - c) * t.$$

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

- Эта прямая пересекается с картинной плоскостью в точке с координатами

$$x_0' = c * x_0 / (c - z_0); y_0' = c * y_0 / (c - z_0); z_0' = 0.$$

- Полученный результат соответствует преобразованию координат точки М с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ТОЧКИ

- В случае, когда центр проецирования имеет координаты (c_x, c_y, c_z) , а картинная плоскость, по-прежнему, совпадает с координатной плоскостью XU матрица проецирования имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_x/c_z & -c_y/c_z & 0 & -1/c_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ТОЧКИ

- Аналогичным образом можно получить матрицы центрального проецирования на ось XZ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_x/c_y & 0 & -c_z/c_y & -1/c_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ТОЧКИ

□ и на ось YZ

$$\begin{pmatrix} 0 & -c_y/c_x & -c_z/c_x & -1/c_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ ПРЯМОЙ

- Центральной проекцией прямой также является прямая.
Пусть

$$p(t) = p_0 + Vt$$

- При центральном проецировании точки с координатами $(x, y, z, 1)$ этой прямой на плоскость XU получим:

$$x' = (x_0 - s_x z_0 + (V_x - s_x V_z)t) / (1 - s_f z_0 - s_f V_z t),$$
$$y' = (y_0 - s_y z_0 + (V_y - s_y V_z)t) / (1 - s_f z_0 - s_f V_z t), \quad z' = 0$$

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ЦП

□ В пределе при $t \rightarrow \infty$ получим

$$\lim p'(t) = (c_x - V_x c_z / V_z, c_y - V_y c_z / V_z, 0, 1)$$

□ Это значит, что предельное положение (точка схода) прямой линии *не зависит* от положения точки p_0 , а определяется только положением центра проецирования S и направляющим вектором V

□ Следовательно, *пучок параллельных прямых проецируется в сходящийся пучок*