

Свойства  
функций  
 $y = \operatorname{tg}x$  и  
 $y = \operatorname{ctg}x$  и их  
графики

$$y = \operatorname{tg} x$$

Функция  $y = \operatorname{tg} x$  определена при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , является нечетной и периодической с периодом  $\pi$ .

Покажем, что на промежутке функция  $y = \operatorname{tg} x$  возрастает.

Покажем, что на промежутке функция  $y = \operatorname{tg} x$  возрастает.

Пусть  $0 \leq x_1 < x_2 < \pi/2$ . Покажем, что  $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$ ,

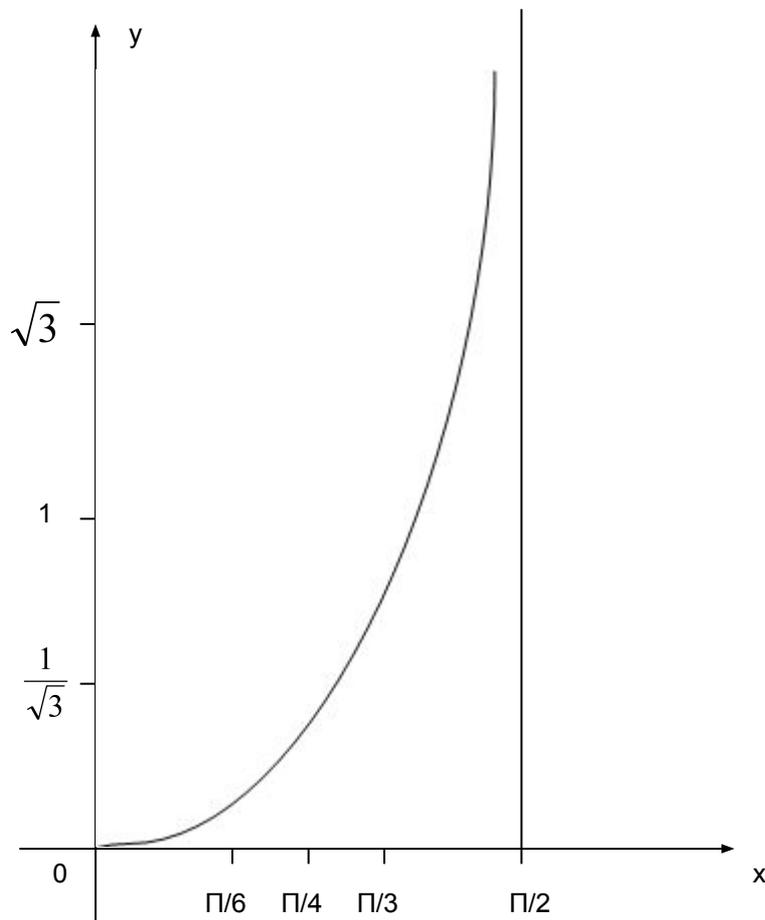
т.е.  $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$ . По условию  $0 \leq x_1 < x_2 < \pi/2$ , откуда по свойствам функции  $y = \sin x$  имеем  $0 \leq \sin x_1 < \sin x_2$ , а по

свойствам функции  $y = \cos x$  имеем  $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$ , откуда

$0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$ . Перемножив неравенства  $\sin x_1 < \sin x_2$

и  $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$  получим  $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$

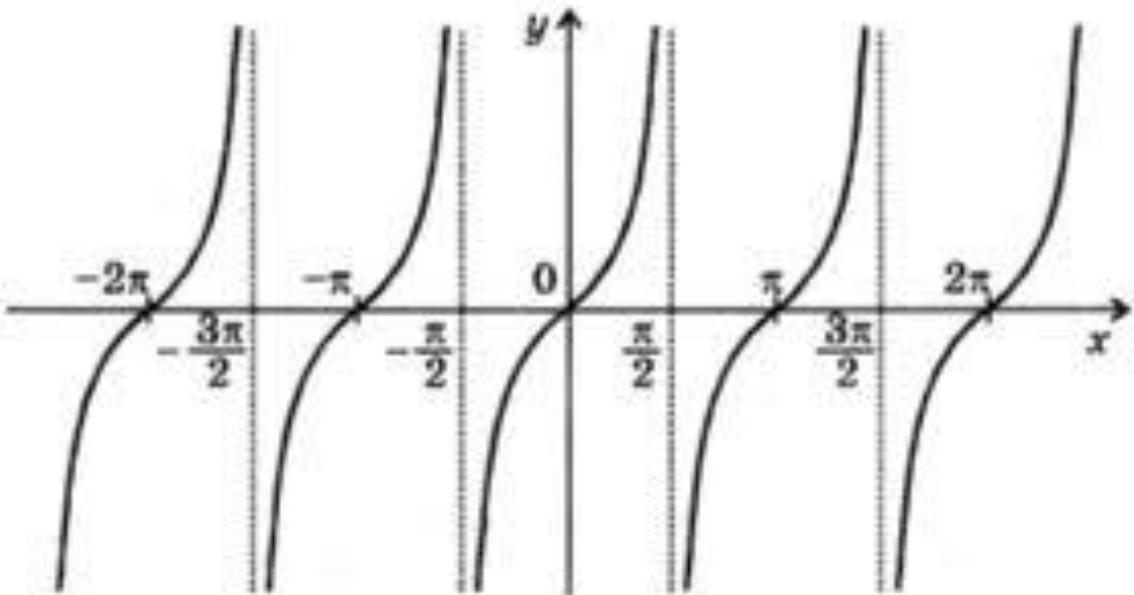
Построим график на промежутке  $[0; \pi/2)$  и отразим его симметрично относительно начала координат, получим график этой функции на интервале  $(-\pi/2; \pi/2)$



При  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  функция  $y = \operatorname{tg}x$  не определена. Если  $x < \pi/2$  и  $x$  приближается к  $\pi/2$ , то  $\sin x$  приближается к 1, а  $\cos x$ , оставаясь положительным, стремится к нулю. При этом дробь  $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg}x$  возрастает и поэтому график функции  $y = \operatorname{tg}x$  приближается к вертикальной прямой  $x = \pi/2$ . Аналогично при отрицательных значениях  $x$ , больших  $-\pi/2$  и приближающихся к  $-\pi/2$ , график функции  $y = \operatorname{tg}x$  приближается к вертикальной прямой  $x = -\pi/2$ , т.е. прямые  $x = \pi/2$  и  $x = -\pi/2$  являются вертикальными асимптотами графика функции.

# Построение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения:

Функция  $y = \operatorname{tg} x$  периодическая с периодом  $\Pi$ , следовательно график этой функции получается на интервале от  $(-\Pi/2; \Pi/2)$  сдвигами вдоль оси абсцисс на  $\Pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$



# Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

1) Область

определения – множество всех

действительных чисел  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

2) Множество значений  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел.

3) Периодическая с периодом  $\pi$

4) Нечетная.

5) Функция принимает значение, равно 0, при

$$\chi = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Положительные значения на интервале  $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$   
 $n \in \mathbb{Z}$

Отрицательные  $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n), n \in \mathbb{Z}$

Возрастающая  $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

# Задача 1: Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ принадлежащие отрезку $[-\pi; 3\pi/2]$

Построим графики функций  $y=2$  и  $y = \operatorname{tg} x$ . Эти графики пересекаются в 3-х точках, абсциссы которых  $x_1, x_2, x_3$  являются корнями уравнения  $\operatorname{tg} x = 2$ . На интервале  $(-\pi/2; \pi/2)$  уравнение имеет корень  $x_1 = \operatorname{arctg} 2$ . т.к. функция  $y = \operatorname{tg} x$  периодическая с периодом  $\pi$ , то  $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$ ,  $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$ .

Ответ:  $x_1 = \operatorname{arctg} 2$ ,  $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$ ,  $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$ .

Задача 2: Найти все решения неравенства  $\operatorname{tg} x \leq 2$ , принадлежащие отрезку  $[-\pi; 3\pi/2]$

Построим графики функций  $y=2$  и  $y= \operatorname{tg} x$ . Из графика видно, что график функции  $y=\operatorname{tg} x$  лежит не выше прямой  $y=2$  на промежутках  $[-\pi; x_3]$ ,  $(-\pi/2; x_1]$  и  $(\pi/2; x_2]$ .

Ответ:  $x \in [-\pi; -\pi + \operatorname{arctg} 2]$ ,  $x \in (-\pi/2; \operatorname{arctg} 2]$ ,  $x \in (\pi/2; \pi + \operatorname{arctg} 2]$

# Сравнить числа:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} \text{ и } \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \\ & \operatorname{tg} \frac{\pi}{5} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \text{ и } \operatorname{tg} \frac{8\pi}{9} \\ & \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} < \operatorname{tg} \frac{8\pi}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{8}\right) \text{ и } \operatorname{tg} \left(-\frac{8\pi}{9}\right) \\ & \operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{8}\right) > \operatorname{tg} \left(-\frac{8\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{5}\right) \text{ и } \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{7}\right) \\ & \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{5}\right) > \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} 2 \text{ и } \operatorname{tg} 3 \\ & \operatorname{tg} 2 < \operatorname{tg} 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} 1 \text{ и } \operatorname{tg} 1,5 \\ & \operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1,5 \end{aligned}$$

# Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

- Для построения графика функции  $y = \operatorname{ctg} x$  воспользуемся тождеством  $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + \pi/2)$ . Из этого тождества следует, что для построения графика  $\operatorname{ctg}$  необходимо сдвинуть график  $\operatorname{tg}$  на  $\pi/2$  влево вдоль оси  $Ox$  и отразить полученную кривую относительно оси  $Ox$ . Графики  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$  состоят из бесконечного множества одинаковых периодически повторяющихся ветвей.

# Основные свойства функции $y = \text{ctg} x$

- Область определения-  
множество всех действительных  
чисел  $x \neq \pi k; k \in \mathbb{Z}$
- Множество значений-  
множество  $\mathbb{R}$  всех  
действительных чисел
- Функция  $y = \text{ctg} x$  периодическая с  
периодом  $T = \pi$
- Функция  $y = \text{ctg} x$  нечетная
- Функция  $y = \text{ctg} x$  принимает значения, равные нулю при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$
- -положительные значения на  
интервалах  $(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k); k \in \mathbb{Z}$
- -отрицательные значения на  
интервалах  $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k); k \in \mathbb{Z}$
- Функция  $y = \text{ctg} x$  является  
убывающей на каждом  
интервале  $(\pi k; \pi + \pi k); k \in \mathbb{Z}$

# График функции $y = \operatorname{ctg} x$

