# Математический анализ

**Составитель: Никулина Л.С.,
старший преподаватель кафедры
Математики и Моделирования**

# Литература

Основная литература:

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа, т. 1, 2

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.

Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, 2.

## Дополнительная литература:

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 1, 2.

Учебно-методические разработки:

Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина, И. В. Пивоварова. Курс лекций по высшей математике, ч. 1, 2.-Владивосток, изд. ВГУЭиС, 2001.

Сборник задач по высшей математике. Сост. И. В. Пивоварова, Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина. -Владивосток, изд. ВГУЭиС, 2002.

# Содержание

- Функции нескольких переменных
- Дифференциальные уравнения 1-го, 2-го и более высокого порядков
- Кратные интегралы
- Числовые ряды
- Степенные ряды
- Ряды Фурье

ВГУЭС

# Функции нескольких переменных

Лекция 1

# Определение функции двух переменных

*Определение*. Если каждой паре *(x,y)* значений двух независимых друг от друга переменных величин *x* и *y* из некоторого множества *D* соответствует единственное значение величины *z*, а каждому *z* соответствует хотя бы одна пара *(x,y)*, то мы говорим, что *z* есть функция двух независимых переменных *x* и *y*, определенная в *D*.

# Обозначения

При этом пишут:

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y).$$

Если паре $(x_0, y_0) \in D$ соответствует число $z_0 \in L$, то пишут $z_0 = f(x_0, y_0)$

Или $z_0 = z\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$

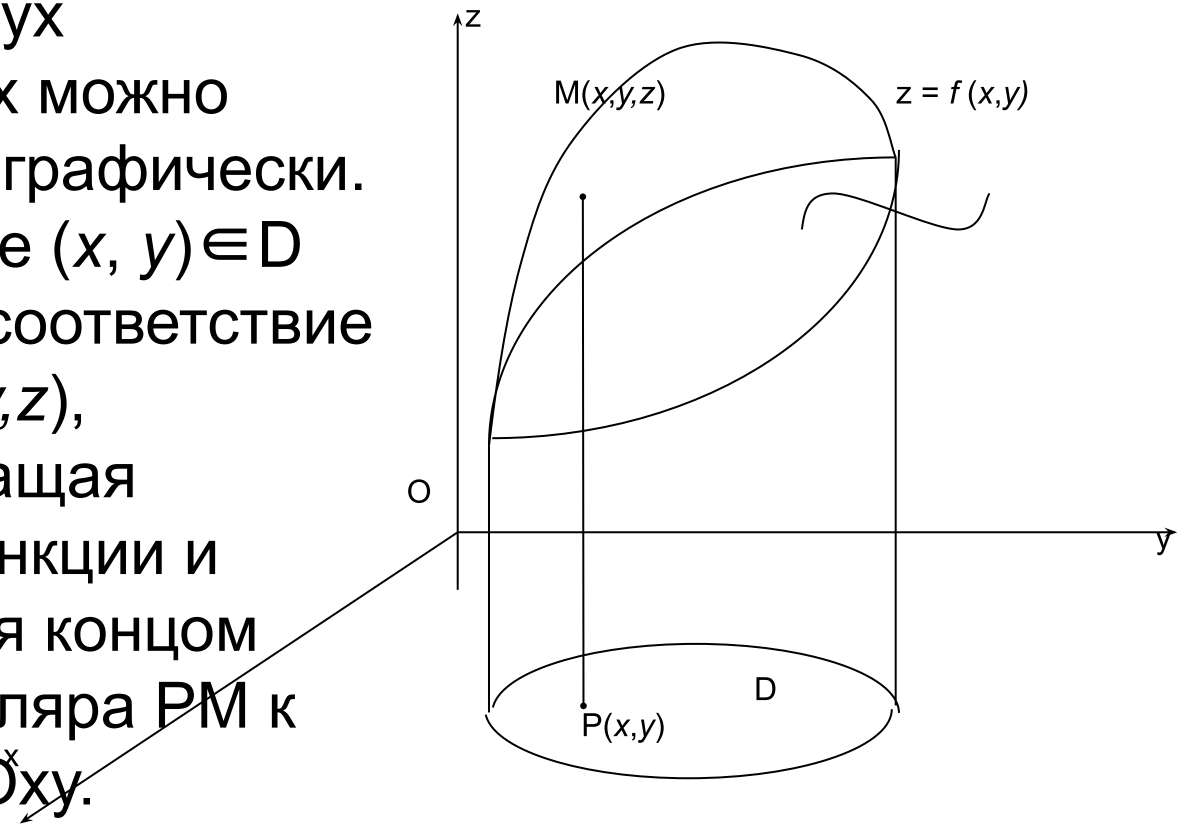
$z_0$ называется частным значением функции при $x = x_0, y = y_0$.

# ***График функции 2-х переменных***

Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $z=$ $=f(x,y)$, *называется графиком функции двух переменных.*

# График функции

Функцию двух переменных можно изобразить графически. Каждой паре $(x, y) \in D$ ставится в соответствие точка $M(x, y, z)$, принадлежащая графику функции и являющаяся концом перпендикуляра PM к плоскости Oxy.



# Предел функции 2-х переменных

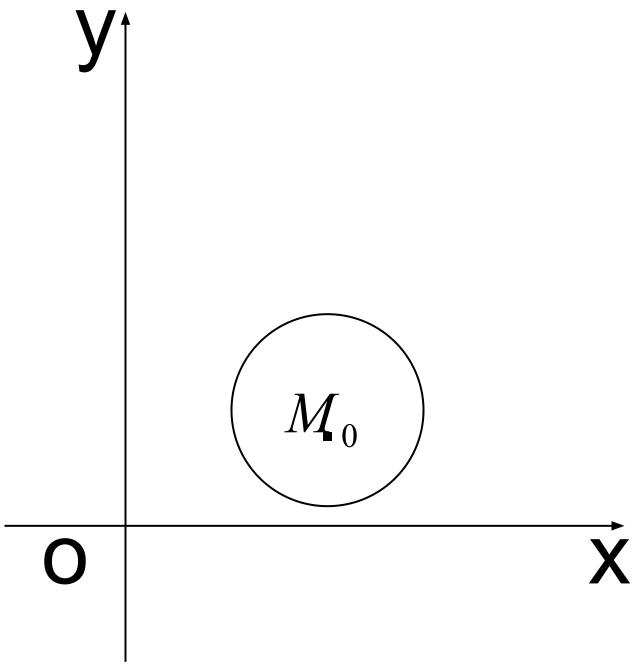
***Окрестностью радиуса R*** точки $M_0$ называется совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса ***R*** с центром в точке $M_0$ , кроме самой точки.

# Предел функции 2-х переменных

Таким образом, окрестностью точки является множество точек,

УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ НЕРАВЕНСТВУ

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<R$$



# Определение предела функции 2-х переменных

Число **A** называется пределом функции *z=f(x,y) при* $M \to M_0$ *, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число R>0, что для всех точек M(x,y), лежащих в окрестности радиуса R точки* $M_0$*, выполняется условие*

$$\left| f(x,y) - A \right| < \varepsilon$$

При этом пишут: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$ или

$$\lim_{M \to M_0} f(x,y) = A$$

# Непрерывность

Функция *z=f(x,y)* называется ***непрерывной в точке*** $M_0$, если выполнены условия:

1)функция определена в точке $M_0$,

2)если существует $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$,

3)если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$

# Непрерывность

Другое определение: Функция *z=f(x,y)* называется *непрерывной в точке* $M_0$, если в этой точке бесконечно малому приращению аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$

где $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ .

# *Внутренние и граничные точки*

Линию, ограничивающую некоторую область $D$ в плоскости $Oxy$, мы будем называть *границей* этой области.

Точки области, не лежащие на границе области, мы будем называть *внутренними точками* области, если они принадлежат области вместе со своей окрестностью.

# *Открытая и замкнутая области*

Область, состоящую из одних внутренних точек, мы будем называть открытой или ***незамкнутой.***

Если же к области относятся еще и точки границы, то область называют ***замкнутой.***

# Ограниченная область

Область называют ***ограниченной,*** если существует такое постоянное *C*>0, что расстояние любой точки *M* области от начала координат *O* меньше *C*, т.е. $|OM| < C$

ВГУЭС

# *Наибольшее и наименьшее значения функции*

*Теорема Вейерштрасса*. Непрерывная функция в замкнутой ограниченной области $D$ достигает по крайней мере один раз наибольшего значения $M$ и наименьшего значения $m$.

# Частные приращения функции 2-х переменных

Разность $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции $f(x, y)$ по переменной $x$.

Разность $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции $f(x, y)$ по переменной $y$.

# Частные производные

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то он называется частной производной (первого порядка) функции $z = f(x, y)$ по переменной $x$ и обозначается

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

# Продолжение

Аналогично определяется частная производная по переменной $y$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Эту производную обозначают

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

# Производные высших порядков

***Частной производной*** n-го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной (n-1)-го порядка той же функции. Например, для функции 2-х переменных имеем:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x \qquad z''_{xy} = (z'_x)'_y$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x \qquad z''_{yy} = (z'_y)'_y$$

# *Равенство смешанных производных*

***Теорема***. Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

Так, $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$$