

Лекция №2

ФУНКЦИИ  
КОМПЛЕКСНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО

## *ПЛАН*

- 1. Основные понятия.*
- 2. Предел и непрерывность ФКП.*
- 3. Основные элементарные функции комплексного переменного и их свойства.*

## \* 1. Основные понятия

Пусть даны два множества  $D$  и  $E$ , элементами которых являются комплексные числа. Числа  $z = x + iy$  множества  $D$  будем изображать точками комплексной плоскости  $z$ , а числа  $\omega = u + iv$  множества  $E$  - точками комплексной плоскости  $\omega$ .

Если каждому числу  $z \in D$  по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число  $\omega \in E$ , то говорят, что на множестве определена **однозначная функция комплексного переменного**  $\omega = f(z)$ , отображающая множество  $D$  в множество  $E$ .

\* Если каждому  $z \in D$  соответствует несколько значений  $\omega$ , то функция  $\omega = f(z)$  называется **многозначной**.

Множество  $D$  называется **областью определения** функции  $\omega = f(z)$ ; множество  $E_1$  всех значений  $\omega$ , которые  $f(z)$  принимает на  $E$ , называется **областью значений** этой функции (если же каждая точка множества  $E$  является значением функции, то  $E$  - область значений функции; в этом случае функция  $f$  отображает  $D$  на  $E$ ).

В дальнейшем будем рассматривать такие функции  $\omega = f(z)$ , для которых  $D$  и  $E_1$  являются **областями** (обладают свойствами открытости и связности).

\* Точка  $z_0$  называется **внутренней** точкой множества  $E$ , если существует такая  $\varepsilon$  - окрестность этой точки, что все точки из этой окрестности принадлежат множеству  $E$ .

Точка  $z_0$  называется **внешней** точкой множества  $E$ , если существует такая  $\varepsilon$  - окрестность этой точки, что все точки из этой окрестности не принадлежат множеству  $E$ .

Точка  $z_0$  называется **граничной** точкой множества  $E$ , если в её любой  $\varepsilon$  - окрестности содержатся как точки принадлежащие так и не принадлежащие множеству  $E$ .

Совокупность всех граничных точек множества  $E$  называется **границей** множества  $E$ .

\* Множество  $E$  называется **открытым**, если оно состоит только из внутренних точек.

Множество  $E$  называется **замкнутым**, если кроме внутренних точек оно содержит и все свои граничные точки.

Если область  $E$  ограничена замкнутой не самопересекающейся линией  $L$ , то она называется **односвязной**.

Если область  $E$  ограничена двумя замкнутыми не пересекающимися и не самопересекающимися линиями  $L_1$  и  $L_2$ , то она называется **двусвязной**. Если  $L_2$  вырождается в точку или в непрерывную дугу, то область все равно двусвязная.

\* Функцию  $\omega = f(z)$  можно записать в виде  $u + iv = f(x + iy)$ , т.е.  $f(x + iy) = u(x; y) + iv(x; y)$ , где  $u = u(x; y) = \operatorname{Re} f(x)$  - **действительная часть функции  $f(z)$** , а  $v = v(x; y) = \operatorname{Im} f(x)$  - **мнимая часть функции  $f(z)$** .

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

**Пример.** Найти действительную и мнимую части функции  $\omega = z^2$ .

\*

## 2. Предел и непрерывность ФКП.

Пусть однозначная функция  $\omega = f(z)$  определена в некоторой окрестности точки  $z_0$ , исключая, может быть саму точку  $z_0$ .

Число  $A$  называется **пределом функции  $\omega = f(z)$  в точке  $z_0$** , если для любого положительного  $\varepsilon$  найдется такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $z \neq z_0$ , удовлетворяющих неравенству  $|z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z) - A| < \varepsilon$ . Записывают:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

Из определения следует, что если предел  $A$  существует, то существуют и пределы  $\lim_{z \rightarrow z_0} u(x; y) = u_0$  и

$\lim_{z \rightarrow z_0} v(x; y) = v_0$ . Верно и обратное утверждение.

\* Теоремы об арифметических свойствах пределов для функций одного (или нескольких) действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного.

Пусть функция  $\omega = f(z)$  определена в точке  $z = z_0$  и в некоторой ее окрестности.

Функция  $\omega = f(z)$  называется **непрерывной в точке  $z_0$** , если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Функция  $f(z)$  **непрерывна в области  $D$** , если она непрерывна в каждой точке этой области.

### \* 3. Основные элементарные функции комплексного переменного.

#### Показательная функция

Показательная функция  $\omega = e^z$  определяется формулой  
$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Если  $x = 0$ , то  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$  (формула Эйлера).

Свойства показательной функции:

1) Если  $y = 0$ , то  $e^z = e^x$ ;

2)  $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ ;

3)  $\omega = e^z$  периодическая функция с периодом  $T = 2\pi i$ .

(доказать самостоятельно)

\* Из формулы Эйлера следуют равенства:

$$e^{2\pi ni} = 1, n \in Z$$

$$e^{\pi(2n+1)i} = -1, n \in Z$$

$$e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)i} = i, n \in Z$$

Докажем второе равенство.

$$e^{\pi(2n+1)i} = \cos(2n+1)\pi + i \sin(2n+1)\pi = -1 + i0 = -1$$

Из второй формулы видно, что показательная функция комплексного переменного  $\omega = e^z$  не всегда больше нуля.

\*

## Логарифмическая функция

Логарифмическая функция  $\omega = \text{Ln}z$  определяется как обратная функция к показательной функции  $e^z$ . Так как  $e^z \neq 0$ , то логарифмическая функция  $\omega = \text{Ln}z$  определена на всей плоскости  $z$ , кроме точки  $z = 0$  (выражение  $\text{Ln}(-2)$  имеет смысл).

Чтобы найти логарифм, нужно решить уравнение

$e^\omega = z$  относительно  $\omega$ . Пусть  $\omega = u + iv$ ,  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $\rho > 0$ . Подставим в уравнение, получим  $e^{u+iv} = \rho e^{i\varphi}$ ;  $e^u \cdot e^{iv} = \rho e^{i\varphi}$ , тогда  $e^u = \rho$ , а  $v = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Следовательно  $u = \ln \rho$ ,  $v = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Т.о.  $\text{Ln}z = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k) = \ln|z| + i\text{Arg} z$ .

\* Логарифмическая функция  $\omega = \text{Ln}z$  многозначная.

(Почему?) Однозначную ветвь этой функции можно выделить, подставив в формулу определенное значение  $k$ . Положив  $k=0$ , получим однозначную функцию, которая называется **главным значением** логарифма  $\text{Ln}z$  и обозначается символом  $\ln z$ :  $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ , где  $-\pi < \arg z \leq \pi$ .

Свойства логарифмической функции:

$$1) \text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln}z_1 + \text{Ln}z_2;$$

$$2) \text{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln}z_1 - \text{Ln}z_2;$$

$$3) \text{Ln}z^n = n \cdot \text{Ln}z;$$

$$4) \text{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Ln}z.$$

## \* Степенная функция $\omega = z^n$

Если  $n$ -натуральное число, то степенная функция определяется равенством  $\omega = z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .  
Функция  $\omega = z^n$ - однозначная.

Если  $n = \frac{1}{q}$  ( $q \in N$ ), то в этом случае  $\omega = z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{z} =$   
 $= \sqrt[q]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z + 2k\pi}{q} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{q} \right)$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, q - 1$ .

Здесь функция  $\omega = z^{\frac{1}{q}}$  есть многозначная ( $q$ -значная) функция.

Если  $n = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in N$ ), то степенная функция определяется равенством

$$\omega = z^{\frac{p}{q}} = \left( z^{\frac{1}{q}} \right)^p = \sqrt[q]{|z|^p} \left( \cos \frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} + i \sin \frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} \right).$$

Функция  $\omega = z^{\frac{p}{q}}$  - многозначная.

\* Степенная функция  $\omega = z^a$  с произвольным комплексным показателем  $a = \alpha + i\beta$  определяется равенством

$$\omega = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Функция  $\omega = z^a$  определена для всех  $z \neq 0$ , является многозначной функцией.

Так,  $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln|i| + i(\arg i + 2\pi k))} = e^{i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$ ,  
где  $k \in Z$ . При  $k = 0$  имеем:  $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ .

## \* Тригонометрические функции

Тригонометрические функции комплексного аргумента  $z = x + iy$  определяются равенством

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

При действительных  $z$  эти определения приводят к тригонометрическим функциям действительного переменного.

Тригонометрические функции комплексного переменного сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительного переменного.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z \text{ и т.д.}$$

## \* Гиперболические функции

Эти функции определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Заменяя в указанных функциях  $z$  на  $iz$ , получим:

$$\operatorname{shi} z = i \sin z, \quad \text{или} \quad \sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

Пользуясь этим равенствами можно получить ряд формул, связывающих гиперболические функции. Так заменяя в формуле  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$  тригонометрические функции гиперболическими, получим  $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ .

Из определения гиперболических функций следует, что функции  $\operatorname{sh} z$  и  $\operatorname{ch} z$  периодические с периодом  $2\pi i$ ; функции  $\operatorname{th} z$ , и  $\operatorname{cth} z$  имеют период  $\pi i$ .

## \* Обратные тригонометрические функции

Число  $\omega$  называется *арксинусом числа  $z$* , если  $\sin \omega = z$  и обозначается  $\omega = \operatorname{Arcsin} z$ . Используя определение синуса, получим:

$$\omega = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}) \quad (\text{фун-я многозначная}).$$

Можно показать, что

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z} \quad (z \neq \pm i),$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i} \quad (z \neq \pm i).$$

***Спасибо за внимание!***