

Франсуа Виет и его теорема как инструмент для решения уравнений

Человек живет, пока думает.

Решайте задачи и живите долго!
Потому что алгеброй начинать
строгое математическое учение.

(Н.И. Лобачевский)

Франсуа Виет

(1540-1603)

В 2010 году исполнилось 470 лет со дня рождения замечательного французского математика, положившего начало алгебре как науке о преобразовании выражений, создателя буквенного исчисления, Франсуа Виета.

Актуальность

- **Уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее число задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений.**
- **Уравнения решали двадцать пять веков назад. Они создаются и сегодня – как для использования в учебном процессе, так и для конкурсных экзаменов в вузы, для олимпиад самого высокого уровня.**

Цель:

изучить материал о великом учёном, французском математике – Франсуа Виете, рассмотреть квадратные уравнения частного порядка, научиться использовать теорему Виета как инструмент для решения уравнений и задач, связанных с корнями и коэффициентами уравнения n -ой степени.

Задачи:

ВЫЯСНИТЬ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ КТО

такой Франсуа Виет, его вклад в математику;

узнать историю его жизни;

повторить понятие квадратного уравнения,

узнать об уравнениях частного порядка и их решении рациональным способом;

узнать какие уравнения называются

уравнениями высших степеней;

рассмотреть теорему Виета как инструмент для решения уравнений и других задач.

Кто Вы, господин Виет?



Франсуа Виет – крупнейший французский математик 16 века
Родился в 1540 году во Франции в городе Фонтене-ле-Конт. По образованию юрист. Но все свое свободное время он отдавал занятиям математикой, а также астрономией. Особенно увлеченно он начал работать в области математики с 1584г. Виет детально изучил труды, как древних, так и современных ему математиков. Разработал почти всю элементарную алгебру. Известны «формулы Виета», дающие зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения. Ввел буквенные обозначения для коэффициентов в уравнениях.

Математические открытия



Франсуа Виет
1540—1603

Главные открытия Ф. Виета изложены в знаменитом **«Введении в аналитическое искусство»**, опубликованном в 1591 году. Основной замысел ученого замечательно удался: **началось преобразование алгебры в мощное математическое исчисление**. Франсуа называл алгебру аналитическим искусством. Он писал в письме к де Партене: «Все математики знали, что под алгеброй скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти...»

Интересные факты из жизни и деятельности ученого

- Франсуа Виет, вычисляя периметры вписанного и описанного **322 216**-угольников, получил **9** точных десятичных знаков.
- Впервые обозначать десятичные дроби с помощью запятой предложил Франсуа Виет. До него изображение дробей было весьма сложным. Так, например, дробь **0,3469** писалась так: **3(1)4(2)6(3)9(4)**.
- Виет первым стал обозначать буквами не только неизвестные, но и данные величины. Тем самым он внедрил в науку великую мысль о возможности выполнять алгебраические преобразования над символами, т.е. ввести понятие математической формулы.
- Ученый мог работать по трое суток без сна!

- Теорему Виета можно обобщить на многочлены любой степени.
- Непосредственно применение трудов Виета очень затруднялось тяжелым и громоздким изложением. Из-за этого они полностью не изданы до сих пор.
- Г.Г. Цейтен отмечал, что чтение работ Виета затрудняется несколько изысканной формой, в которой повсюду сквозит его большая эрудиция, и большим количеством изобретенных им и совершенно не привившихся греческих терминов. Потому влияние его, столь значительное по отношению ко всей последующей математике, распространялось сравнительно медленно.
- Виет первым стал применять скобки, которые, правда, у него имели вид не скобок, а черты над многочленом.

Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называют уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где коэффициенты a , b , c – любые действительные числа, причём $a \neq 0$.

Квадратное уравнение называют приведённым, если его старший коэффициент равен 1.

Пример:

$$x^2 + 2x + 6 = 0.$$

Квадратное уравнение называют не приведенным, если старший коэффициент отличен от 1.

Пример:

$$2x^2 + 8x + 3 = 0.$$

Полное квадратное уравнение – квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых, иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты b и c отличны от нуля.

Теорема Виета

Очень любопытное свойство корней
квадратного уравнения обнаружил

французский математик Франсуа Виет. Это
свойство называли теорема Виета:

**Чтобы числа x_1 и x_2 являлись корнями
уравнения:**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

необходимо и достаточно выполнения
равенства

$$x_1 + x_2 = -b/a \text{ и } x_1 x_2 = c/a$$

Пример.

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 6$$

По праву в стихах быть воспета
О свойствах корней теорема Виета.

Что лучше, скажи, постоянства
такого:

Умножишь ты корни и дробь уж
готова:

В числителе C , в знаменателе A ,
А сумма корней тоже дроби равна
Хоть с минусом дробь эта, что за
беда-

В числителе B , в знаменателе A .

И. Дырченко

Квадратные уравнения частного характера

1) Если $a + b + c = 0$ в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, то
 $x_1 = 1$, а $x_2 = -\frac{c}{a}$

2) Если $a - b + c = 0$, в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, то:
 $x_1 = -1$, а $x_2 = -\frac{c}{a}$

3) Метод “переброски”

Корни квадратных уравнений $y^2 + by + ac = 0$ и $ax^2 + bx + c = 0$
 связаны соотношениями:

$$x_1 = -\frac{y_1}{a} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{y_2}{a}$$

Пример

$$418x^2 - 1254x + 836 = 0$$

Этот пример очень тяжело решить через дискриминант, но, зная выше приведенную формулу его с легкостью можно решить.

$$a = 418, b = -1254, c = 836.$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

Формула Виета для многочленов (уравнений) высших степеней

Формулы, выведенные Виетом для квадратных уравнений, верны и для многочленов высших степеней.

Пусть многочлен

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ имеет n различных корней $x_1, x_2, \dots, x_n$.

В этом случае он имеет разложение на множители вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Разделим обе части этого равенства на $a_0 \neq 0$ и раскроем в первой части скобки. Получим равенство:

$$x^n + \left(\frac{a_1}{a_0} \right) x^{n-1} + \dots + \left(\frac{a_n}{a_0} \right) = x^n - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) x^{n-1} + \\ + x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n) x^{n-2} + \dots + (-1)^n x_1x_2 \dots x_n$$

Но два многочлена тождественно равны в том и только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях равны. Отсюда следует, что выполняется равенство

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = - \frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Например, для многочленов третьей степени $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ имеем тождества

$$x_1 + x_2 + x_3 = - \frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$x_1x_2x_3 = - \frac{a_3}{a_0}$$

Если старший коэффициент многочлена $a_0 \neq 1$, то для применения формул Виета нужно разделить все коэффициенты на a_0 .

В этом случае формулы Виета дают выражение для отношений всех коэффициентов к старшему. Из последней формулы Виета следует, что если корни многочлена целочисленные, то они являются делителями его свободного члена, который также целочисленен.

Обратные корни

Напишем приведённое кубическое уравнение

$y^3 + b_1y^2 + b_2y + b_3 = 0$, корни которого обратны
корням уравнения $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$

Решение:

1) Пусть x_1, x_2, x_3 - корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$

2) Т.к. $a = 1$, то по формулам Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = -5 \end{cases}$$

3) Пусть y_1, y_2, y_3 - корни уравнения $y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0$

4) Тогда $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_3 = \frac{1}{x_3}$.

5) Т.к. $a=1$, то по формулам Виета

$$b_1 = -(y_1 + y_2 + y_3) = -\frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3} = -\frac{7}{5}$$

$$b_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = -\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{3}{5}$$

$$b_3 = -y_1 y_2 y_3 = -\frac{1}{x_1 x_2 x_3} = \frac{1}{5}$$

6) Следовательно искомое уравнение имеет вид:

$$y^3 + \frac{7}{5} y^2 - \frac{3}{5} y + \frac{1}{5} = 0, \text{ или } 5y^3 + 7y^2 - 3y + 1 = 0.$$

Покажем, что формулы Виета позволяют рационально решать уравнения 2-й и 3-й степеней.

Проведём эксперимент для уравнения 2-й степени



В это опыте я сравнила время, потраченное на решение уравнения $x^2+3x+2=0$ через дискриминант, и время на решение этого же уравнения с помощью теоремы Виета. В результате получилось, что в первом случае ученик тратит 35 секунд, а во втором- 15!

Вывод: С формулами Виета можно сэкономить время!

Проведём эксперимент для уравнения 3-й степени

Дано уравнение:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

Ищем корень среди чисел:

$$\pm 1; \pm 3$$

Подбором находим один из корней уравнения, - 1.

Следовательно, $x^3 - 3x^2 - x + 3$ делится на $(x + 1)$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3x^2 - x + 3 & x + 1 \\
 \hline
 x^3 + x^2 & x^2 - 4x + 3 \\
 \hline
 -4x^2 - x & \\
 -4x^2 - 4x & \\
 \hline
 3x + 3 & \\
 -3x - 3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$(x + 1)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad \text{или} \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

По формулам Виета:

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 1$$

Ответ: $-1; 1; 3$.

Теперь решим то же уравнение с помощью формул Виета

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

По формулам Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1 \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$$

Следовательно, корни уравнения равны $-1; 1; 3$.

Вывод: формулы Виета позволяют **рационально решить** это уравнение.

При решении уравнений было замечено, что
уравнения

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

и

$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

имеют взаимно обратные корни.

Гипотеза

Корни уравнений $ax^2 + bx + c = 0$

и $cx^2 + bx + a = 0$, где $a \neq 0, c \neq 0$,

взаимно обратные.

Доказательство

По формулам Виета из первого уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Рассмотрим числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = -\frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{x_1} \times \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a}{c}$$

Значит, эти числа являются корнями
уравнения $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$, что
равносильно уравнению

$$cx^2 + bx + a = 0$$

	Кол-во чел. опрош енных	Кол-во чел. знающи х квадрат ные уравне ния	Кол-во чел. умеющих решать их с помощь ю т. Виета	Кол-во чел. знающих уравнени я высших степеней	Кол-во чел. умеющих решать уравнени я высших степеней с помощь ю т. Виета
9Б класс	25	25	12	18	8
10 класс	14	14	14	2	2
11 класс	14	14	14	2	0
Преподавате ли	4	3	3	3	2

Спасибо

за

внимание!