

• § 4. Формула включений-исключений. Беспорядки.

• Теорема 1 (формула включений-исключений).

- Пусть $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ – конечное множество. Тогда

$$n(A) = \sum_{1 \leq i \leq m} n(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{m+1} \cdot n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m).$$

- **Доказательство.** Возьмем элемент $a \in A$.
- В число, стоящее слева, этот элемент «вносит» единицу.
- Подсчитаем, какое число соответствует элементу в правой части доказываемого равенства. Если мы докажем, что оно также равно 1 , то теорема будет доказана.
- Пусть a входит в k множеств
- Тогда в первое слагаемое элемент a «вносит» 1 , во второе слагаемое элемент a «вносит» 1 , ..., в последнее слагаемое элемент a «вносит» 1 .

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} n(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

$$C_k^2$$

- единиц, так как a входит во все пересечения $A_{i_1} \cap A_{i_2}$
- такие, что A_{i_1} и A_{i_2} содержат a ;
- число таких пересечений — число 2-х элементных подмножеств k -элементного множества, т.е. C_k^2
- В l -ое слагаемое a «вносит» единиц ($l \leq k$). Если $l > k$, то a в такие пересечения уже не входит, т.е. «вносит» в эти суммы 0. Таким образом a «вносит» в правую сумму следующее количество единиц:

$$k - C_k^2 + C_k^3 + \dots + (-1)^{l+1} \cdot C_k^l + \dots + (-1)^{k+1} C_k^k$$

- Чтобы доказать теорему, осталось доказать равенство

$$1 = k - C_k^2 + C_k^3 + \dots + (-1)^{l+1} C_k^l + \dots + (-1)^{k+1} C_k^k$$

- Но это равенство равносильно следующему :

$$1 - k + C_k^2 - C_k^3 + \dots + (-1)^l C_k^l + \dots + (-1)^k C_k^k = 0$$

- которое верно, так как является следствием бинома Ньютона при $x = -1$.
- Теорема доказана.

- Наиболее часто **формулу включений-исключений** применяют в несколько иной формулировке.
- Пусть имеется N предметов, каждый из которых может обладать или не обладать одним из свойств $P_1, P_2, \dots, P_m$.
- Введем следующие обозначения:
- $N(P_i)$ – **количество предметов**, которые обладают свойством P_i ,
- $N(\overline{P_i})$ – **количество предметов**, которые не обладают свойством P_i , причем не важно, обладают они или нет другими свойствами,
- $N(P_{i_1}, \overline{P_{i_2}}, \overline{P_{i_3}})$ – **количество предметов**, которые обладают свойствами P_{i_1} и не обладают свойствами P_{i_2}, P_{i_3} и т. п.

- **Теорема 2.**

$$N(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_m) = N - \sum_{1 \leq i \leq m} N(P_i) + \dots +$$

$$(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} N(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}) + \dots + (-1)^m N(P_1, P_2, \dots, P_m)$$

Пример. Вычислить количество натуральных чисел, не превосходящих 100 , которые не делятся на 2 , 3 , 5 .

Решение. $N = 100$.

- Обозначим через $N(2)$ количество чисел из N , которые делятся на 2 и далее аналогично. Тогда
- $N(2) = 50$, $N(3) = 33$, $N(5) = 20$,
 $N(2,5) = N(10) = 10$, $N(2,3) = N(6) = 16$,
- $N(3,5) = N(15) = 6$, $N(2,3,5) = N(30) = 3$.

По формуле включений-исключений получаем:

$$N = 100 - N(2) - N(3) - N(5) + N(2,3) + N(3,5) + N(2,5) - N(2,3,5) = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 32.$$

- **Определение 3.** Пусть дано множество
- $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- Перестановка $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ **называется беспорядком**, если $k_i \neq i$ для любого $i \leq n$, то есть каждое число не стоит на своем месте.
- **Пример.** Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Выпишем все беспорядки:
- $(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$.

- **Теорема 4.** Число беспорядков n -элементного множества равно

$$n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

- **Доказательство.** Введем обозначения:
- $N(i)$ – количество перестановок, у которых на i -м месте стоит число i .
- Поскольку все остальные $(n-1)$ числа могут стоять произвольно, то
- $N(i) = (n-1)!$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).
- Пусть $N(i, j)$ – количество перестановок, в которых числа i и j стоят на i -м и j -м местах соответственно, $N(i, j) = (n-2)!$

- Пусть $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$ — **количество перестановок**, в которых числа $i_1, i_2, \dots, i_k$ стоят на местах с этими же номерами соответственно,
- $N(i_1, i_2, \dots, i_k) = (n - k)!$.
- Отметим так же, что количество чисел вида $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$
- существует столько же, сколько существует k -элементных подмножеств n -элементного множества, то есть .
- Обозначив через D_n — количество беспорядков множества A , по формуле включений — исключений получаем:

$$\begin{aligned}
D_n &= n! - \sum_{i=1}^n N(i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} N(i_1, i_2) + \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} N(i_1, i_2, \dots, i_k) + \\
&+ \dots + (-1)^n \cdot N(1, 2, 3, \dots, n) = n! - n \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! + \dots + \\
&+ (-1)^k \cdot C_n^k \cdot (n-k)! + \dots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot 0! = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \\
&+ (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)
\end{aligned}$$

- **Пример.** Вернемся к предыдущему примеру. Непосредственным подсчетом мы выясним, что число беспорядков $D_4 = 9$. Вычислим D_4 , используя полученную формулу:

$$\begin{aligned} D_4 &= 4! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) = 4! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = \\ &= 4! \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 12 - 4 + 1 = 9 \end{aligned}$$