



Формализм задачи линейной оптимизации на примере транспортной задачи



Вопрос . Постановка транспортной задачи . Решение средствами MS Excel.



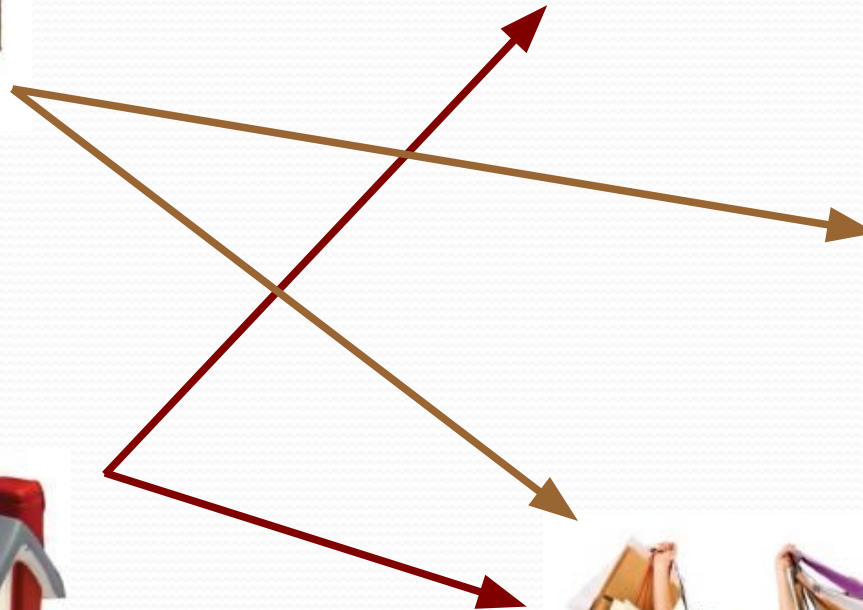
Вопрос 1. Постановка транспортной задачи . Решение средствами MS Excel.

Считаем, что некоторая однородная продукция находится у нескольких **поставщиков** в различных объёмах.

Необходимо доставить эту продукцию ряду **потребителей** в разных количествах.

Известны *стоимости перевозки единицы* продукции от каждого поставщика каждому потребителю.

Требуется составить такой план перевозок, при котором *суммарные затраты* на перевозку всех грузов **минимальны**.



Рассмотрим постановку и математическую модель одной из задач линейной оптимизации, которая получила название *транспортной задачи*.

Необходимо доставить от поставщиков $i = \overline{1, m}$ некоторый однородный груз $j = \overline{1, n}$ (товар) в объеме a_i единиц потребителям с минимальными транспортными издержками (здесь m и n – конечные числа)

Потребность в данном товаре каждого j -го потребителя известна и составляет b_j единиц.

Известны также c_{ij} – величины стоимости перевозки единицы груза от i -го поставщика к j -му потребителю.

Следует составить такой план перевозок x_{ij} , при котором суммарная стоимость перевозки груза (товара) будет минимальной, т.е.
$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Закрытая задача (модель):

суммарные **запасы** поставщиков **равняются** суммарным **запросам** потребителей.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Открытая модель (задача с нарушенным балансом): **запасы** поставщиков **не равны** **запросам** потребителей.

Математическая модель транспортной задачи

Найти переменные задачи $X = (x_{ij}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m,$
удовлетворяющие системе ограничений ,

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

а также условию неотрицательности переменных
и обеспечивающие минимум целевой функции

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Закрытая транспортная задача

Пусть на складах **A1, A2, A3, A4, A5** хранится однотипная продукция в количестве соответственно 100, 150, 350, 200, 200 единиц.

Эту продукцию необходимо доставить потребителям **B1, B2, B3, B4, B5** по их заказам: 100, 200, 200, 300, 200 единиц соответственно.

Стоимость перевозки одной единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения задается следующей таблицей:



	B1	B2	B3	B4	B5
A1	4	3	5	2	3
A2	7	1	2	3	1
A3	9	2	4	5	6
A4	1	3	6	4	10
A5	5	8	15	6	15

Табличная постановка задачи

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	4	3	5	2	3	100
A2	7	1	2	3	1	150
A3	9	2	4	5	6	350
A4	1	3	6	4	10	200
A5	5	8	15	6	15	200
Потребности	100	200	200	300	200	1000

Математическая модель

1. Введение переменных

X_{11} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 1 потребителю;

X_{12} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 2 потребителю;

X_{13} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 3 потребителю;

X_{14} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 4 потребителю;

X_{15} - кол-во груза которое нужно вести от 1 поставщика 5 потребителю;

Математическая модель

1. Введение переменных

X_{21} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 1 потребителю;

X_{22} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 2 потребителю;

X_{23} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 3 потребителю;

X_{24} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 4 потребителю;

X_{25} - кол-во груза которое нужно вести от 2 поставщика 5 потребителю;

и тд.

Математическая модель

1. Введение переменных

Общая запись

X_{ij} - кол-во груза которое нужно вести от i поставщика
 j потребителю, где $i=1..5$, $j=1..5$

Математическая модель

2. Определение целевой функции

$$\begin{aligned} F = & 4x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + 3x_{15} + 7x_{21} + x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + x_{25} + \\ & 9x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34} + 6x_{35} + x_{41} + 3x_{42} + 6x_{43} + 4x_{44} + 10x_{45} + 5x_{51} + \\ & + 8x_{52} + 15x_{53} + 6x_{54} + 15x_{55} \end{aligned}$$

Математическая модель

2. Ограничения

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 100$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 150$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 350$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 200$$

$$X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} = 200$$

Математическая модель

2. Ограничения

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 100$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 200$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = 200$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} = 300$$

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} = 200$$

$$X_{ij} \geq 0$$

демонстрация

Транспортная задача 2

Три поставщика одного и того же продукта располагают в планируемый период следующими запасами этого продукта: первый- 120 условных единиц, второй- 100 и третий 80 единиц. Этот продукт должен быть перевезен к трем потребителям, спросы которых соответственно равны 90, 90 и 120 условных единиц. Приведенная ниже таблица содержит показатели затрат, связанных с перевозкой продукта из i -го пункта отправления в j -й пункт потребления. Требуется перевезти продукт с минимальными затратами.

Поставщики	Потребители и их спрос			Запасы
	А	Б	В	
I	7	6	4	120
II	3	8	5	100
III	2	3	7	80
Спрос	90	90	120	

Транспортная задача 3

Заводы фирмы расположены в городах Минске и Витебске. Они доставляют товары на склады городов Могилев, Гомель и Брест. Затраты на перевозку 1 т товара представлены в таблице.

Заводы	Склады			Запасы
	Могилев	Гомель	Брест	
Минск	210	308	349	800
Витебск	164	342	626	500
Спрос	400	600	300	

Завод в Минске выпускает 800 т товаров, а в Витебске – 500 т. Могилевский склад вмещает 400 т, Гомельский – 600 т, а Брестский - 300 т. Как следует транспортировать товар для минимизации цен на перевозки.