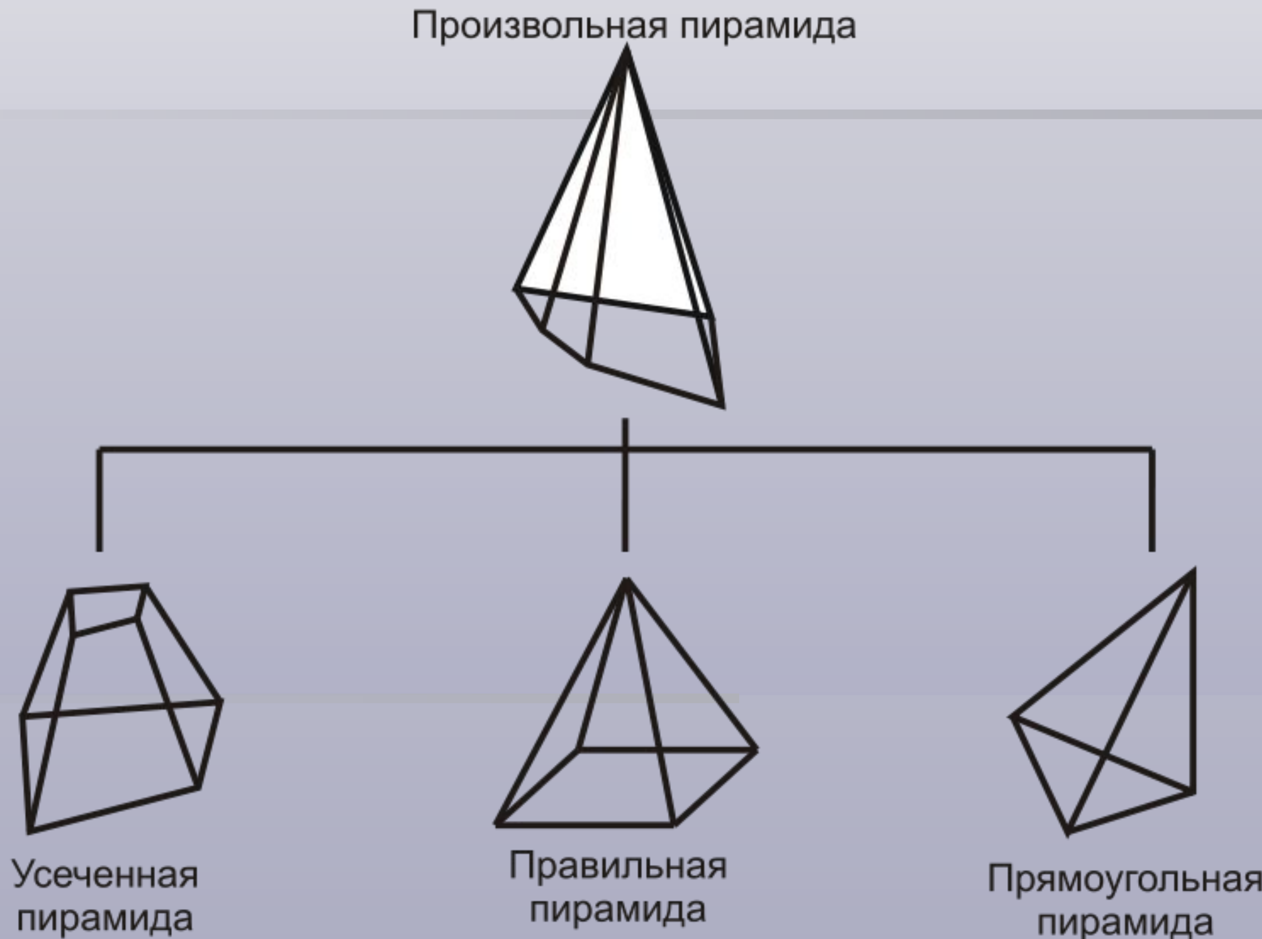
МОУ СКУГАРЕЕВСКАЯ СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА

Содержание

Что такое пирамида?

Пирами́да (др.-греч. πυραμίς, род. п. πυραμίδος) — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину [1]. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д. Пирамида является частным случаем конуса.

Виды пирамид

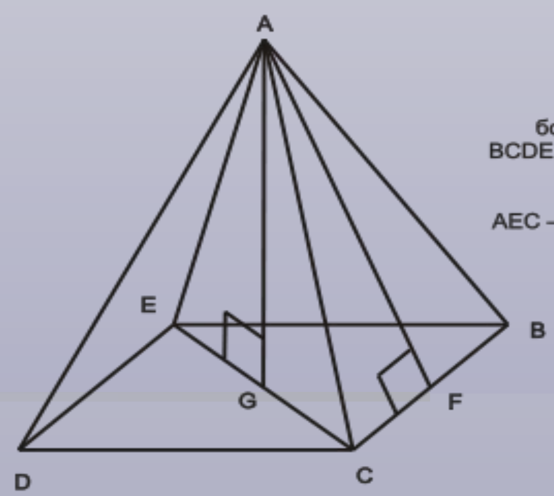


История развития геометрии пирамиды

- Начало геометрии пирамиды было положено в Древнем Египте и Вавилоне, однако активное развитие получило в Древней Греции. Первый, кто установил, чему равен объем пирамиды был Демокрит [2], а доказал Евдокс Книдский. Древнегреческий математик Евклид, систематизировал знания о пирамиде в XII томе своих «Начал», а также вывел первое определение пирамиды: **телесная фигура, ограниченная плоскостями, которые от одной плоскости сходятся в одной точке**.

Элементы пирамиды

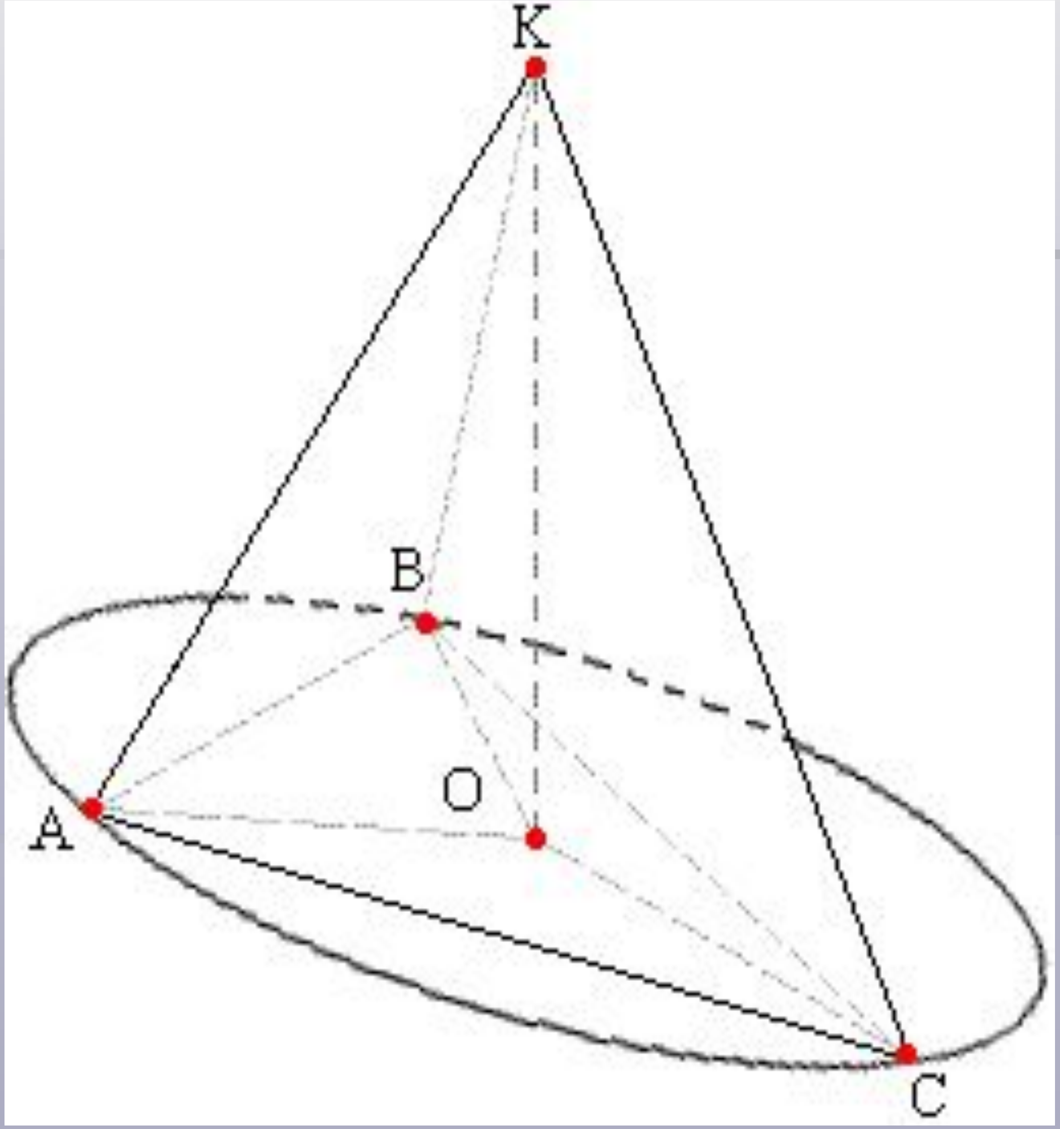
- **апофема** — высота боковой грани правильной пирамиды [3];
- **боковые грани** — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;
- **боковые ребра** — общие стороны боковых граней;
- **вершина пирамиды** — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;
- **высота** — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра);
- **диагональное сечение пирамиды** — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;
- **основание** — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды



A – вершина пирамиды;
AB, AC, AD, AE – ребра пирамиды;
ADE, AEB, ABC, ACD – боковые грани пирамиды;
BCDE – основание пирамиды;
AG – высота;
AF – апофема;
AEC – диагональное сечение.

Свойства пирамиды

- Все диагонали пирамиды принадлежат её граням.
- **Если все боковые ребра равны**, то:
- около основания пирамиды можно описать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр;
- боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы.
- **Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом**, то:
- в основание пирамиды можно вписать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр;
- высоты боковых граней равны;
- площадь боковой поверхности равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани


K
B
O
A
C

Развертка пирамиды

Развёрткой многогранной поверхности называется плоская фигура, получаемая последовательным совмещением всех граней поверхности с плоскостью.

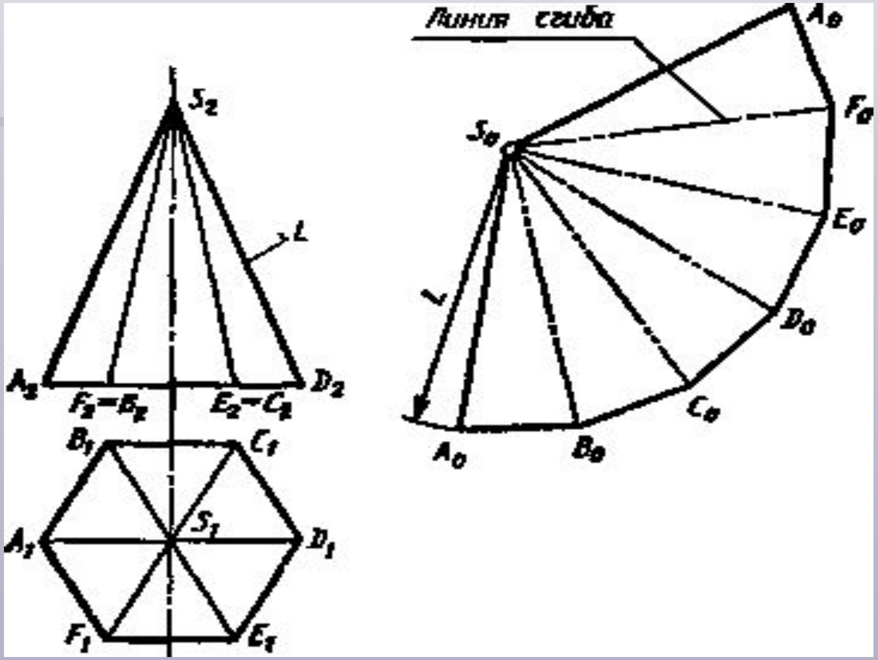
Так как все грани многогранной поверхности изображаются на развёртке в натуральную величину, построение её сводится к определению величины отдельных граней поверхности — плоских многоугольников.

Существует три способа построения развёртки многогранных поверхностей:

Способ нормального сечения;

Способ раскатки;

Способ треугольника.



При построении развёртки пирамида применяется способ треугольника. Развёртка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников — граней пирамиды и многоугольника — основания. Поэтому построение развёртки пирамиды сводится к определению натуральной величины основания и граней пирамиды. Грани пирамиды можно построить по трём сторонам треугольников, их образующих. Для этого необходимо знать натуральную величину рёбер и сторон основания. Определение истинной величины основания и рёбер пирамиды

Алгоритм построения

Определяют натуральную величину основания пирамиды (например методом замены плоскостей проекций);

Определяют истинную величину всех рёбер пирамиды любым из известных способов (в данном примере натуральная величина всех рёбер пирамиды определена методом вращения вокруг оси перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций и проходящей через вершину пирамиды S);

Строят основание пирамиды и по найденным трём сторонам строят какую-либо из боковых граней, пристраивая к ней следующие.

Точки, расположенные внутри контура развёртки, находят во взаимно однозначном соответствии с точками поверхности многогранника. Но каждой точке тех рёбер, по которым многогранник разрезан, на развёртке соответствуют две точки, принадлежащие контуру развёрт

ТЕОРЕМЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ПИРАМИДУ С ДРУГИМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ

Сфера

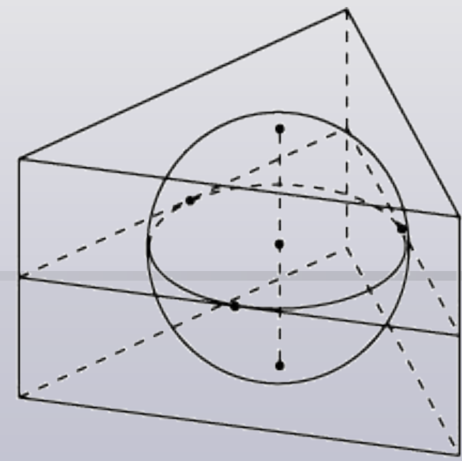


Рис. 25

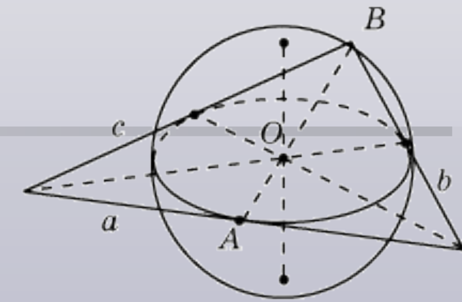
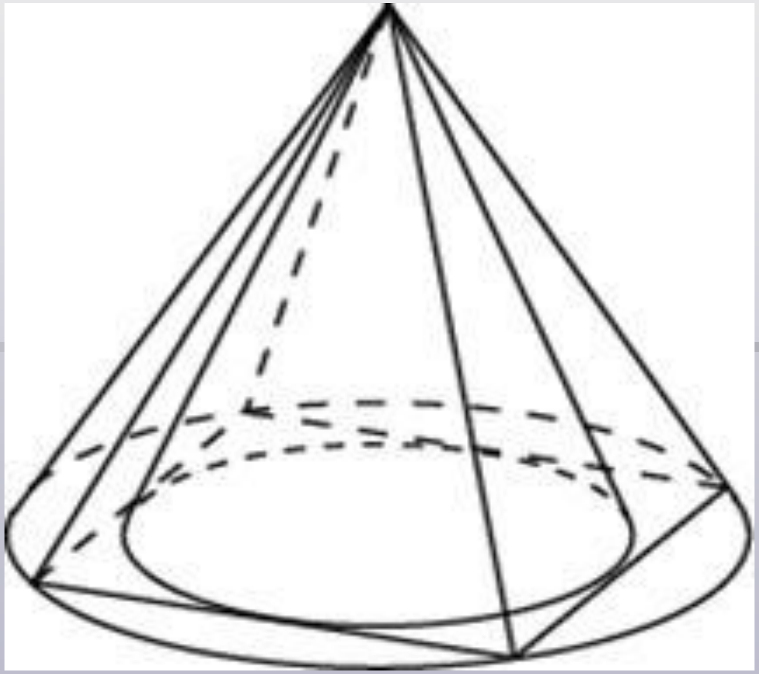


Рис. 26

около пирамиды можно описать сферу тогда, когда в основании пирамиды лежит вписанный многоугольник (необходимое и достаточное условие). Центром сферы будет точка пересечения плоскостей, проходящих через середины рёбер пирамиды перпендикулярно им. Как следствие из этой теоремы следует, что как около любой треугольной, так и около любой правильной пирамиды можно описать сферу;

в пирамиду можно вписать сферу тогда, когда биссекторные плоскости внутренних двугранных углов пирамиды пересекаются в одной точке (необходимое и достаточное условие). Эта точка будет центром сферы.

Конус

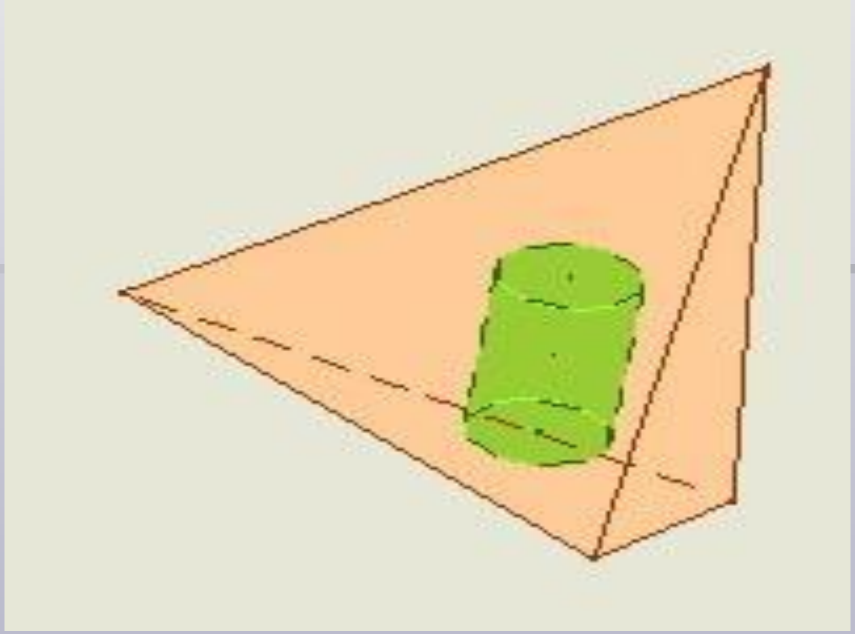


Конус называется вписанным в пирамиду, если вершины их совпадают, а его основание вписано в основание пирамиды. Причём вписать конус в пирамиду можно только тогда, когда апофемы пирамиды равны между собой (необходимое и достаточное условие);

Конус называется описанным около пирамиды, когда их вершины совпадают, а его основание описано около основания пирамиды. Причём описать конус около пирамиды можно только тогда, когда все боковые ребра пирамиды равны между собой (необходимое и достаточное условие);

Высоты у таких конусов и пирамид равны между собой.

Цилиндр



Цилиндр называется вписанным в пирамиду, если вершина пирамиды принадлежит его одному основанию, а другое его основание совпадает с окружностью вписанной в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Причём вписать цилиндр в пирамиду можно только тогда, когда в основании пирамиды — описанный многоугольник (необходимое и достаточное условие);

Цилиндр называется описанным около пирамиды, если вершина пирамиды принадлежит его одному основанию, а другое его основание описано около основания цилиндра. Причём описать цилиндр около пирамиды можно только тогда, когда в основании пирамиды — вписанный многоугольник (необходимое и достаточное условие).

Формулы, связанные с пирамидой

Объём пирамиды может быть вычислен по формуле:

где S — площадь основания и h — высота; Боковая поверхность — это сумма площадей боковых граней:

Полная поверхность — это сумма боковой поверхности и площади основания:

$S_p = S_b + S_o$ Для нахождения боковой поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулы:

где a — апофема боковой грани, P — периметр основания, n — число сторон основания, b — боковое ребро, α — плоский угол при вершине пирамиды

Особые случаи пирамиды

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Тогда она обладает такими свойствами:

боковые ребра правильной пирамиды равны;

в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники;

в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу;

если центры вписанной и описанной сферы совпадают, то сумма плоских углов при вершине пирамиды равна π, а каждый из них соответственно , где n — количество сторон многоугольника основания[6];

площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Пирамида правильная (рис. 8)

a — апофема;
h — высота;
p — периметр основания;
V — объем;
S — площадь основания;
$S_{бок}$ — боковая поверхность.

$$V = \frac{Sh}{3};$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} pa.$$

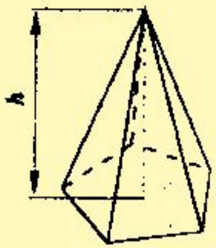
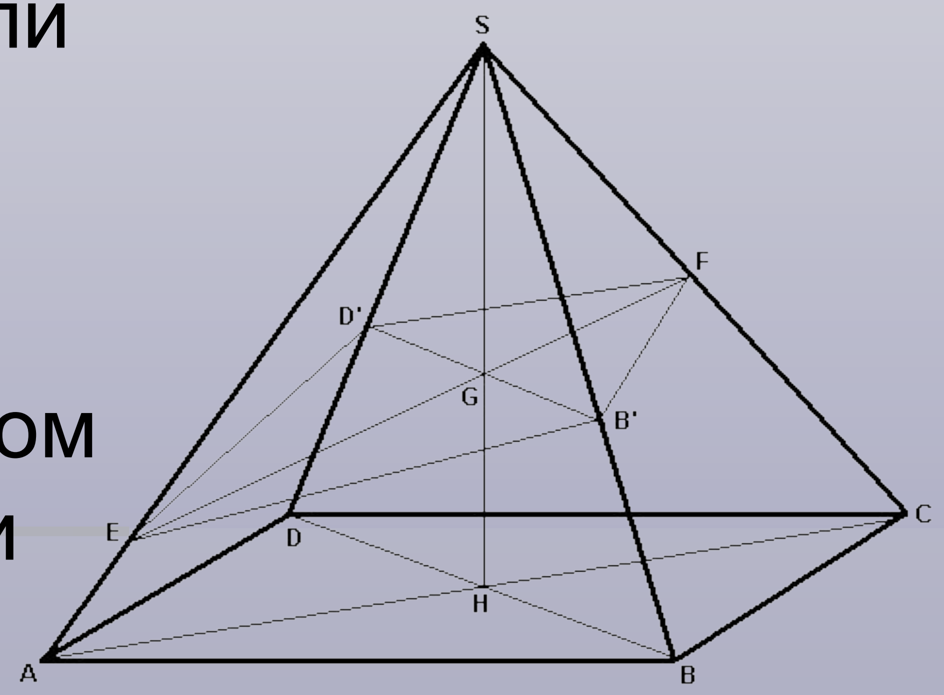


Рис. 8.

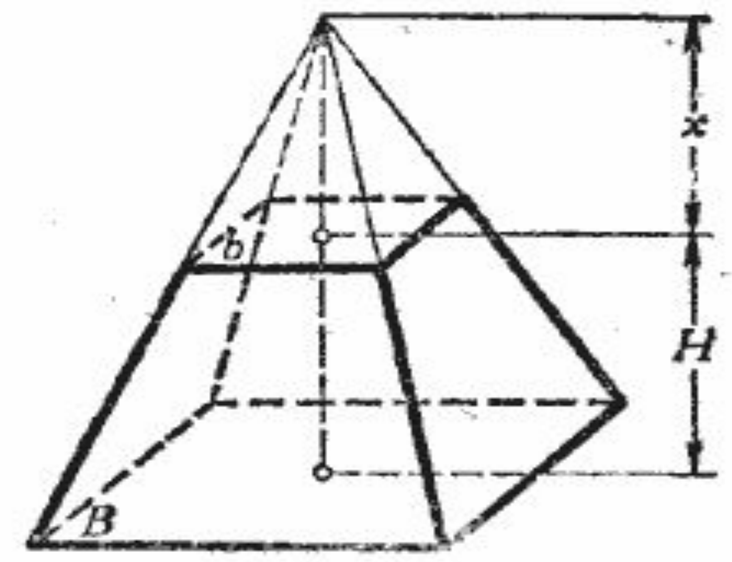
Прямоугольная пирамида

Пирамида называется прямоугольной, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.



Усечённая пирамида

Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между пирамидой и секущей плоскостью, параллельной её основанию.



Черт. 104.

Связанные определения

Тетраэдром называется треугольная пирамида. В тетраэдре любая из граней может быть принята за основание пирамиды. Кроме того, существуют большое различие в понятиях правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр.

Интересные факты

Интересные факты

Формула для расчёта объёма усечённой пирамиды была выведена раньше чем для полной.