

ЭЛЛИПСОИД И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД

Подготовили студенты группы КИ17-06“б”: Хлоптунова Ангелина;
Булдаков Максим;
Букатич Алена;
Чижова Ирина.

ЭЛЛИПСОИД

Эллипсоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

$$\begin{cases} x = x_0 + a \sin \theta \cos \phi, \\ y = y_0 + b \sin \theta \sin \phi, \\ z = z_0 + c \cos \theta, \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \right).$$

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

ПРИМЕРЫ ИЗ ЖИЗНИ



ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ

Исследуем форму эллипсоида, применив так называемый метод сечений. Суть этого метода состоит в следующем. Рассмотрим сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям (эти плоскости имеют уравнения вида $x=h$, $y=h$ и $z=h$, где h - некоторая константа). В сечениях получаются кривые, вид которых мы распознаем. Проведя достаточно много таких сечений, мы в итоге получим представление о форме поверхности.

Прежде чем начинать исследование формы эллипсоида методом сечений, договоримся о следующем. Мы будем рассматривать кривые, получающиеся в сечении той или иной поверхности плоскостями с уравнениями вида $w=h$, где w - одна из букв x , y и z . Для экономии места мы вместо записи общего уравнения полученной кривой вида

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ w = h, \end{cases}$$

будем писать только уравнение $F(x, y) = 0$ и называть его уравнением полученной кривой внутри плоскости $w = h$ (или просто «плоскостным» уравнением этой кривой).

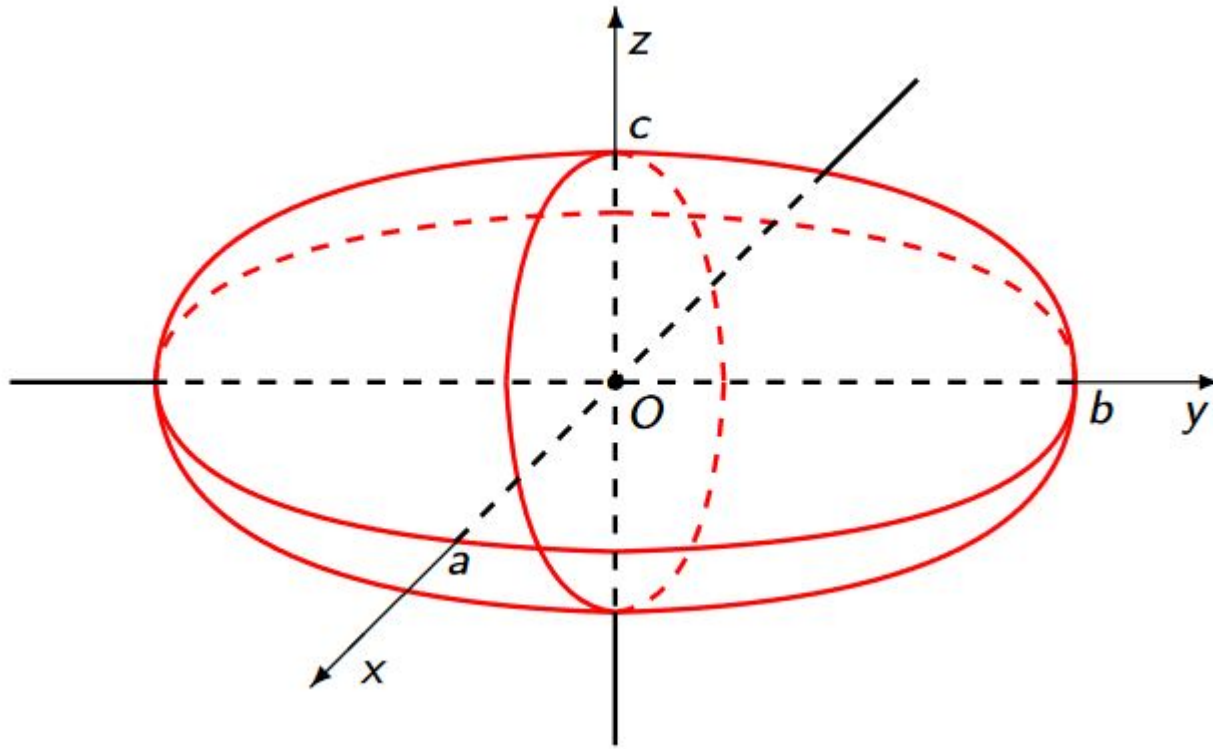
Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостями вида $z = h$. Получим кривую, которая внутри этой плоскости задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

При $|h| > c$ эта кривая является пустым множеством, при $|h| = c$ - точкой, а при $|h| < c$ - эллипсом с «плоскостным» уравнением

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$

При $h=0$ полуоси этого эллипса имеют наибольшие значения (равные a и b), с ростом $|h|$ они уменьшаются и стремятся к 0 при $|h| \rightarrow c$. Абсолютно аналогично устроены сечения эллипсоида плоскостями вида $x=h$ и $y=h$ (надо только соответствующим образом заменить неизвестные и параметры a, b, c в уравнении получающегося эллипса).



Таким образом, можно сказать, что эллипсоид - это «вытянутая» (или, наоборот, «сплюснутая» - смотря вдоль какой оси смотреть) сфера.

Говоря нематическим языком, можно сказать, что эллипсоид имеет форму яйца.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД

Эллиптическим параболоидом называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

$$z = 2px^2 + 2qy^2,$$

$$z = 2px^2 - 2qy^2,$$

где $pq > 0$.

$$z = 2px^2$$

ПРИМЕРЫ ИЗ ЖИЗНИ



ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ

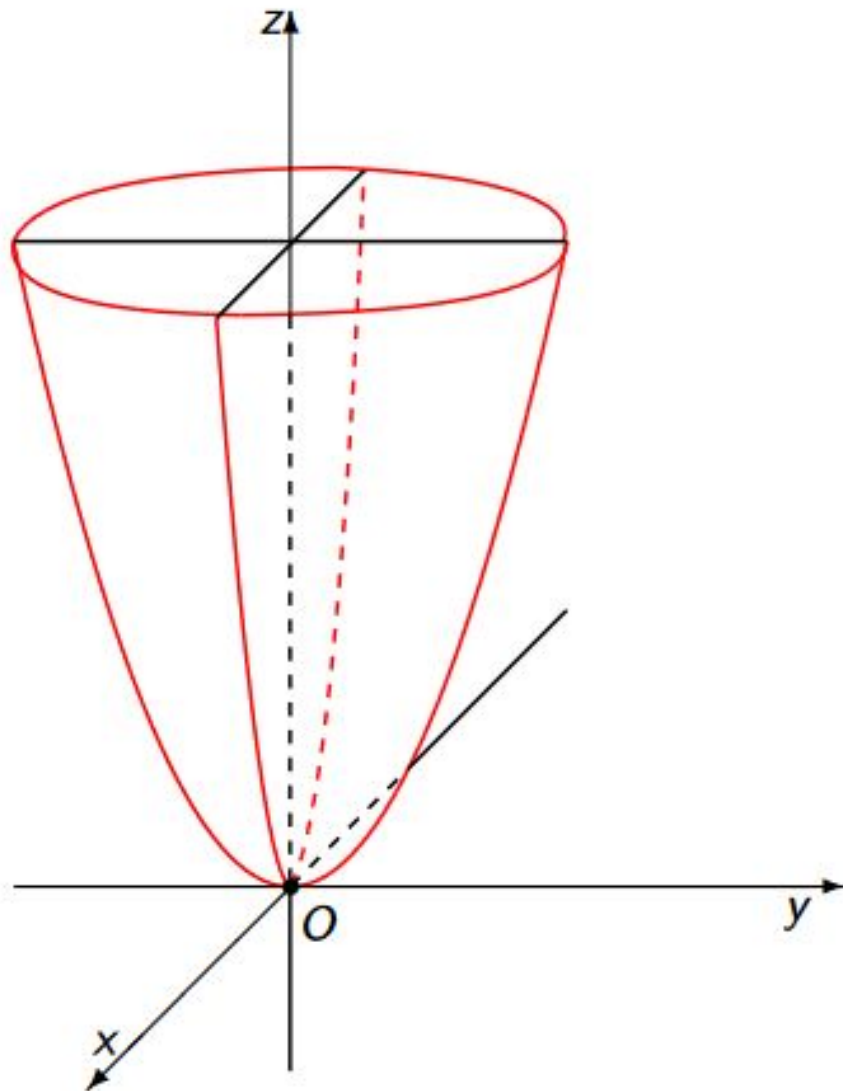
Изучим форму этой поверхности методом сечений. В сечении плоскостью $y = h$ получается кривая с «плоскостным» уравнением

$$x^2 = 2a^2 \left(z - \frac{h^2}{2b^2} \right)$$

Это парабола с параметром a^2 , ветви которой направлены вверх, т. е. в положительном направлении оси Oz . При $h=0$ ее вершина совпадает с началом координат, с увеличением $|h|$ она поднимается вдоль оси Oz . Аналогичным образом устроено сечение плоскостью $x = h$: это парабола с «плоскостным» уравнением

$$y^2 = 2b^2 \left(z - \frac{h^2}{2a^2} \right)$$

параметр которой равен b^2 , а вершина совпадает с началом координат при $h=0$ и поднимается вдоль оси Oz с ростом $|h|$.



Получившаяся
поверхность

ИНТЕРЕСНЫЕ ФАКТЫ И ОСОБЕННОСТИ

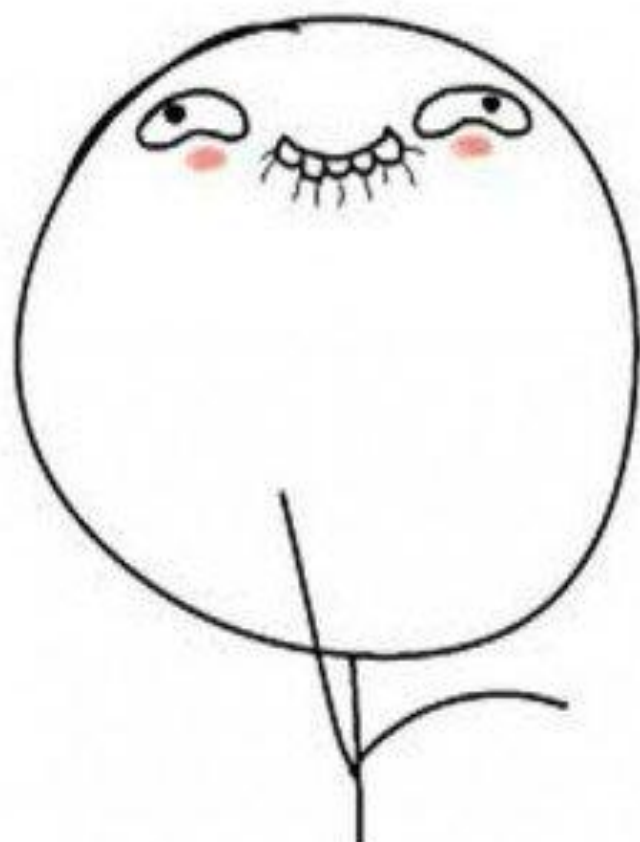
Эллиптический параболоид можно описать как семейство параллельных парабол с ветвями, направленными вверх, вершины которых описывают параболу, с ветвями, также направленными вверх

Часто используется свойство параболоида вращения собирать пучок лучей, параллельный главной оси, в одну точку — фокус, или, наоборот, формировать параллельный пучок излучения от находящегося в фокусе источника. На этом принципе основаны параболические антенны, телескопы-рефлекторы с параболическим зеркалом, прожекторы, автомобильные фары и т. д.

Поверхность жидкости в равномерно вращающемся сосуде является параболоидом вращения

- ❖ http://gm.chgpu.edu.ru/ebook/1_EG/Pt_1_Ch_2_High_Geomerty/Soderjanie/%D0%93%D0%BB%D0%B0%D0%B2%D0%B0%2010.%20%D0%98%D0%B7%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5%20%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9%20%D0%B2%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B3%D0%BE%20%D0%BF%D0%BE%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BA%D0%B0%20%D0%BF%D0%BE%20%D0%BA%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%BC%20%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%D0%BC/Paragraf%2055.htm
- ❖ <http://kadm.imkn.urfu.ru/files/angeom15.pdf>
- ❖ http://matlab.exponenta.ru/gui/book1/new7_3.php
- ❖ https://vk.com/doc108597276_455876773?hash=7447b92e95a41ee6b1&dl=a269e2b58788f0a770
- ❖ http://www.a-geometry.narod.ru/problems/problems_46.htm
- ❖ <http://www.km.ru/referats/31BB97756F9E41BA802C6B7660F34988>
- ❖ <http://www.mathematics.ru/courses/stereometry/content/chapter5/section/paragraph7/theory.html#.Wj9Xst9l-01>
- ❖ <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=ellipsoid>
- ❖ <http://www.km.ru/referats/31BB97756F9E41BA802C6B7660F34988>

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ,



**А ТЕПЕРЬ, ПРОСТО
ПОХЛОПАЛИ!!!**