ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ 2011

ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ СПБ АППО

С 6

ЗАДАНИЕ С6

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

- **ТРЕБОВАНИЯ:** Уметь строить и исследовать простейшие математические модели
- **СОДЕРЖАНИЕ:** Числа, корни и степени, основы тригонометрии, логарифмы, преобразования выражений
- **ПРИМЕРНОЕ ВРЕМЯ РЕШЕНИЯ**

БАЗОВЫЙ: -

ПРОФИЛЬНЫЙ : 40 мин

Задача С6

Найдите все тройки натуральных чисел *k, m и n* , *удовлетворяющие*
уравнению $2 \cdot k!=m!-2 \cdot n!$ $(1!=1;\ 2!=1 \cdot 2=2;\ n!=1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$.

Решение

1. Так как $m!=2 \cdot k! +2 \cdot n!$, *то* $n<m$ *и* $k<m$.
2. Пусть $k \le n$, *тогда* $4 \cdot n! \ge 2 \cdot k! +2 \cdot n!=m! \ge (n+1) \cdot n!$, *откуда* $4 \ge n+1$ *и*
$k \le n \le 3$.
3. Пусть $k>n$, *тогда* $4 \cdot k! \ge 2 \cdot k! +2 \cdot n!=m! \ge (k+1) \cdot k!$, *откуда* $4 \ge k+1$ *и*
$n<k \le 3$.
4. Далее конечным перебором значений $1 \le n \le 3$, $1 \le k \le 3$ *находим все* решения.

n	k	$m!=2 \cdot k! +2 \cdot n!$	m
3	3	$m!=24$	4
3	2	$m!=20$	*Нет решений*
3	1	$m!=18$	*Нет решений*
2	3	$m!=20$	*Нет решений*
2	2	$m!=8$	*Нет решений*
2	1	$m!=6$	3
1	3	$m!=14$	*Нет решений*
1	2	$m!=6$	3
1	1	$m!=14$	*Нет решений*

Критерии оценивания выполнения задания С6
Баллы
Обоснованно получен верный ответ. 4

Ответ правилен, и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы.
3

Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако Конечность перебора не обоснована.
2

Приведен хотя бы один из правильных наборов, и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство. 1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. 0

m! должно быть больше n!, чтобы выполнялось условие $2k! = m! - 2n!$

Предположим, что $k=2$, $m=3$, $n=1$. Проверяем

$2 \cdot 2! = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

$3! - 2 \cdot 1! = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$

$\Rightarrow 2 \cdot 2! = 3! - 2 \cdot 1!$ наше предположение верно

При увеличении значений чисел разница между ними будет увеличиваться, а значит равенство не будет выполняться. Тогда единственным ответом будет $k=2$, $m=3$, $n=1$

Ответ: $k=2$; $m=3$; $n=1$

1 балл 1 балл гарантирован, так как одна верная тройка чисел
указана и проверка произведена. Дальнейшие «эвристические» соображения просто неверны.

$2k! = m! - 2n!$

$k! + n! = \frac{m!}{2} \Rightarrow m > k$; $m > n$, т.к. $m, n, k \in N$, то

наименьшее значение $m = 2$; при $m = 2 \cdot \frac{m}{2} = 1$, а

минимальное значение $k! + n! = 2$

при $m = 3$ $k = 1$ $n = 2$ или $k = 2$ $n = 1$

при $m = 4$ $\frac{m!}{2} = 12$ $n! + k! = 12 \Rightarrow n = 3$ $k = 3$

при $m = 5$ $\frac{m!}{2} = 60$, а наибольшая сумма $n! + k!$ при

данном m будет 58

при $m = 6$ $\frac{m!}{2} = 390$, а наибольшая сумма $n! + k!$

при данном m будет 240

при $m = 7$ $\frac{m!}{2} = 2730$, а наибольшая сумма $n! + k!$

при данном m будет 1560 и т.д.

т.е. при увеличении m разрыв между $\frac{m!}{2}$ и $k! + n!$

будет увеличиваться. Отсюда далее решений нет.

Ответ: $m = 3$, $k = 1$, $n = 2$; $m = 3$, $k = 2$, $n = 1$; $m = 4$, $n = 3$, $k = 3$.

2 балла 2 балла гарантированы, так как все три верные тройки
чисел указаны и проверка произведена. Дальнейшие «эвристические»
соображения верны (т. е. контрпримера не существует), но
не обоснованы

С6. $2\cdot k! = m! - 2\cdot n!$ $\quad k, m, n \in \mathbb{N}$. $\quad k, m, n = ?$

Решение.

$2\cdot k! = m! - 2\cdot n! \Leftrightarrow 2(k! + n!) = m! \Rightarrow m \geq 2$

1) при $m = 2$: $k! + n! = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \in \varnothing \\ n \in \varnothing \end{array}\right.$ – невозможно, т. к. даже при $k = 1$ и $n = 1$ $k! + n! = 2$

2) при $m = 3$: $k! + n! = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1,\ n = 2 \\ k = 2,\ n = 1 \end{array}\right.$

3) $m = 4 \Rightarrow k! + n! = 12 \Leftrightarrow k = 3,\ n = 3$

4) $m = 5 \Rightarrow k! + n! = 60 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \in \varnothing \\ n \in \varnothing \end{array}\right.$ – невозможно, т. к. $4! = 24$, $3! = 6$, $5! = 120$, $6! = 720$

5) $m = 6 \Rightarrow k! + n! = 360 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \in \varnothing \\ n \in \varnothing \end{array}\right.$ – невозможно, т. к. $5! = 120$, $6! = 720$ нет таких x и $y \in \mathbb{N}$, что $x! + n! = 360$

6) при $m \geq 5$ ситуация будет аналогична 5) и 4).

Значит, все возможные тройки чисел, при которых выполняется равенство: $k = 1;\ m = 3;\ n = 2$

$k = 2;\ m = 3;\ n = 1$

$k = 3;\ m = 3;\ n = 3$

Ответ: $(1; 3; 2); (2; 3; 1); (3; 4; 3)$.

2 балла Ситуация схожа с предыдущим примером, правда несколько хуже: вместо «далее будет увеличиваться» тут просто констатируется «аналогично», и
при этом неясно о какой именно аналогии идет речь. Кроме того, регулярное $k \in \varnothing$ *(«нас так учили?») неприятно раздражает. Но меньше 2 баллов поставить* нельзя: все ответы приведены.

3 балла
Обидный случай. Решение оригинальное, т. е. отличное от «образца». Все три ответа верны и найдены разумным конечным перебором.
В рассуждении про невозможность случая *m* ≥5 *ВСЮДУ, т. е. пять раз подряд,* почему-то пропущены значки факториалов (т. е. формально все эти рассуждения неверны), а вместо «более, чем в 5 раз» должно стоять «не менее
чем в 5 раз».

$2k! = m! - 2n!$

$2(k! + n!) = m!$ Пусть m – константа. тогда $k, n < m$) $k < m$, Пусть $k \geq n$, тогда $m \geq k+1$. Докажем, что при $m \geq 5$ решений нет. При $m \geq 5$ k меньше m более, чем в 5 раз. Тогда n должно быть ~~равно~~ меньше m более, чем в 5 раз, их сумма меньше или равна m ~~в 2~~ более чем в 2,5 раза, а умноженная на 2 меньше в 1,25 раз. Поэтому $m \leq 4$. Рассмотрим случаи. Если $m = 1$ – то корней очевидно нет $k! + n! = 1 \Rightarrow$ корней нет.
Если $m = 2$, то ~~$k! + n! = 1$. Тройка $(1;2;1)$~~
Если $m = 3$, то $k! + n! = 3$, $\Rightarrow k! = 2$, $n! = 1$ или $k! = 1$; $n! = 2$. Тройка $(2;3;1)$; $(1;3;2)$
Если $m = 4$, то $k! + n! = 12$, $\Rightarrow k! = n! = 3!$ (очевидно другие не подходят.) Тройка $(3;4;3)$.
Ответ: $\{(3;4;3); (2;3;1); (1;3;2)$

С 6

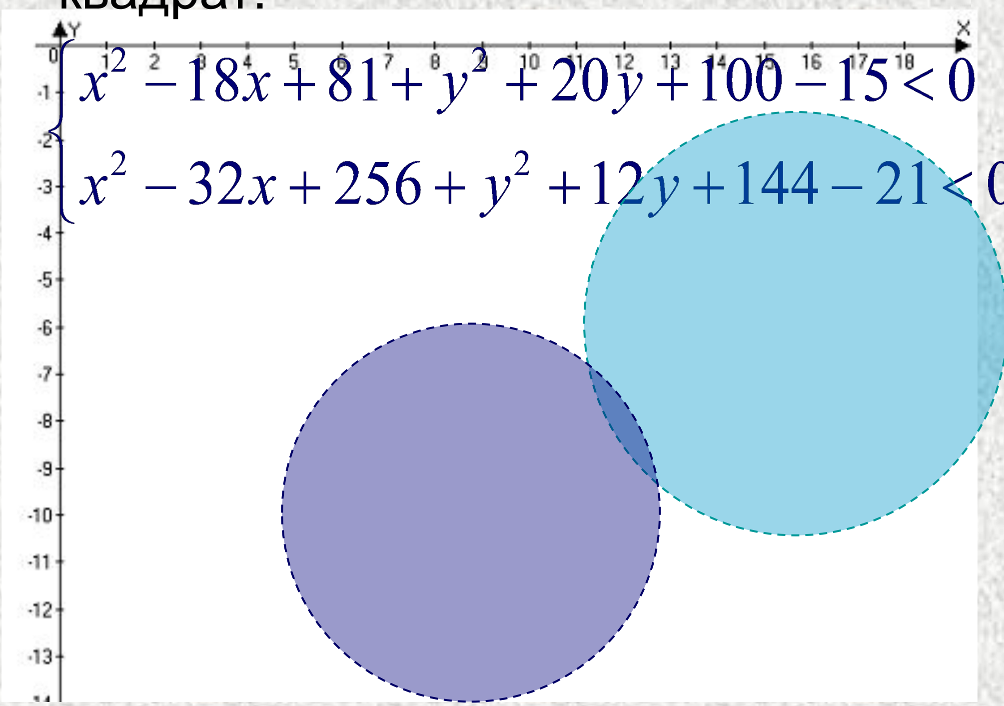
Найдите все пары целых чисел (x; y), удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166 \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271 \end{cases}$$

Решение.

Упростим каждое неравенство данной системы, выделив полный квадрат:

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 81 + y^2 + 20y + 100 - 15 < 0 \\ x^2 - 32x + 256 + y^2 + 12y + 144 - 21 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-9)^2 + (y+10)^2 < 15 \\ (x-16)^2 + (y+6)^2 < 21 \end{cases}$$



Первое неравенство системы представляет множество точек, лежащих внутри окружности с центром (9;-10) и R= $\sqrt{15}$, так как радиус окружности меньше 4, то справедливы неравенства **x<13** и **y<-6.**

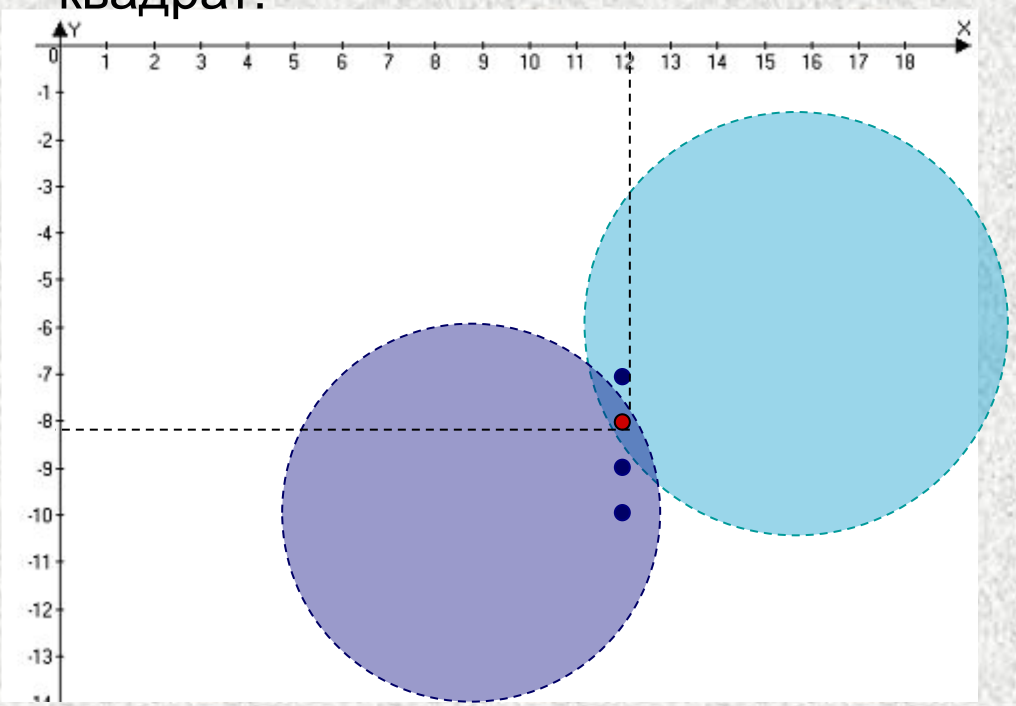
Второе неравенство системы задает множество точек внутри окружности с центром (16;-6) и R= $\sqrt{21}$, так как радиус окружности меньше 5, то справедливы неравенства **x>11** и **y>-11**

С 6

Найдите все пары целых чисел (x; y), удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166 \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271 \end{cases}$

Решение.

Упростим каждое неравенство данной системы, выделив полный квадрат:



По условию ищем точки с целыми координатами, значит достаточно проверить на принадлежность системе неравенств точки

(12;-7), (12;-8), (12;-9), (12;-10).

Проверка показывает, что условию задачи удовлетворяет единственная точка (12; -8).

x>11 и y>-11   x<13 и y<-6.

Ответ: (12; -8)