***ЕГЭ - 2017. Базовый уровень.
Задача № 19.***

Теория делимости.

Учитель математики гимназии № 92
г. Краснодара

Экшиян Алиса Андреевна

«Если вы хотите научиться плавать,

то смело входите в воду,

а если хотите научиться решать задачи,

то решайте их».

Д. Пойа

Признаки делимости.

На 2: если запись числа оканчивается четной цифрой, то число делится на 2.

На 5: если запись числа оканчивается на 0 или 5, то число делится на 5.

На 10: если запись числа оканчивается на 0, то число делится на 10.

Любое число, которое делится на 10 делится на 2 и на 5.

Не любое число, которое делится на 5 будет делиться на 2 и на 10.

Не любое число, которое делится на 2 будет делиться на 5 и на 10.

На 3: если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3.

На 9: если сумма цифр числа делится на 9, то число делится на 9.

Любое число, которое делится на 9 делится и на 3.

Не любое число, которое делится на 3 делится на 9.

На 11: если сумма цифр в записи числа, стоящих на четных местах равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах равна или отличается на 11, то число делится на 11.

На 4: если две последние цифры в записи числа делятся на 4, то число делится на 4.

На 8: если три последние цифры в записи числа делятся на 8, то число делится на 8.

Любое число, которое делится на 8, делится и на 4.

Не любое число, которое делится на 4 будет делиться на 8.

ЗАДАЧА 1. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делиться на 24. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6.$

Теория.

1. Число делится на 3, если сумма цифр этого числа делится на 3.
2. Число делится на 8, если три последние цифры в записи числа образуют число, которое делится на 8.

$\overline{abcd}$ – некоторое шестизначное число. Число делится на 24, значит, должно делиться на 3 и на 8.

Число делится на 8, последние три цифры в записи числа - 112.

$$a + b + c + 1 + 1 + 2 = a + b + c + 4.$$

$a + b + c = 2$ нет возможности.

$$a + b + c = 5, 5 = 2 + 2 + 1.$$

ОТВЕТ. 221112; 212112; 122112.

- **ЗАДАЧА 2.** Найдите трехзначное число, кратное 11, все цифры которого различны, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.
- **РЕШЕНИЕ.** Число $\overline{abc}$ делится на 11.
- **Теория.** Число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо отличается от неё на 11.

$$a + c = b$$

- Если $b = 1$, то $a + c = 1$ – нет комбинации чисел.
- Если $b = 2$, то $a + c = 2$ – нет комбинации чисел.
- Если $b = 3$, то $a = 1$ и $c = 2$ или наоборот.

Получилось число **132**. Проверяем второе условие о сумме квадратов цифр $1^2 + 3^2 + 2^2 = 1 + 9 + 4 = 14$ – не делится на 3.

- Если $b = 4$, то $a = 1$ и $c = 3$ или $a = 2$ и $c = 2$. Получились числа **143** или **242**.

Проверяем второе условие о сумме квадратов цифр

$$1^2 + 4^2 + 3^2 = 1 + 16 + 9 = 26 - \text{не делится на } 3 \text{ и}$$

$$2^2 + 4^2 + 2^2 = 4 + 16 + 4 = 24 - \text{делится на } 3 \text{ и не делится на } 9.$$

Кажется, что мы нашли это число и уже хочется записать его в ответ, но мы забыли условие задачи – все числа должны быть различны. Значит, это число нельзя записать в ответ. Продолжаем подбирать решение.

- Если $b = 5$, то $a = 1$ и $c = 4$ или $a = 2$ и $c = 3$. Получились числа **154** или **451**, **253** или **352**.

Проверяем второе условие о сумме квадратов цифр

$$1^2 + 5^2 + 4^2 = 1 + 25 + 16 = 42 - \text{делится на } 3 \text{ и не делится на } 9.$$

$2^2 + 5^2 + 3^2 = 4 + 25 + 9 = 38 - \text{не делится на } 3$, а значит, не удовлетворяет условию задачи. Решение можно продолжать и дальше, но просили найти хотя бы одно такое число. И мы его нашли – это **154** или **451**.

- **ОТВЕТ. 154; 451; 187; 781; 275; 572; 517; 715; 528; 825; 748; 847.**

ЗАДАЧА 3. Найдите четырехзначное число, кратное 88, все цифры которого различны и четны. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. Число $\overline{abcd}$ делится на 88.

$88 = 8 \cdot 11$, для делимости на 11 $a + c = b + d$ и $\overline{bcd}$ (три последние цифры в записи числа) должно делиться на 8.

Помним, что все цифры четные и различные.

Четные цифры это – 0, 2, 4, 6, 8.

$2 + 4 = 6 + 0$, то есть число **2640**. Проверяем делимость на 8. 640 делиться на 8. Другую последовательность этих цифр взять нельзя (**2046**), потому что не выполняется делимость на 8.

Рассмотрим цифры 2, 4, 6, 8.

$2 + 8 = 4 + 6$. Получим число **2486** или **8426** или **8624** или **6248**. Первые два числа не подходят – не выполняется признак делимости на 8, а вот два последних числа соответствуют второму условию (**8624; 6248**).

ОТВЕТ. 2640; 8624; 6248.

ЗАДАЧА 4. Найдите трехзначное натуральное число, которое при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 1 и цифры которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. Так как число делится на 4, на 5 и на 6 и дает в остатке 1, значит, оно делится на $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ и в остатке так же дает 1, т.е. число может иметь вид $120n + 1$, где n – некоторое натуральное число.

Таковыми числами могут быть числа: 121; 241; 361; 481; 601; 721; 841; 961 и еще такими числами могут быть числа 181; 301; 421; 541; 661; 781; 901.

Проверяем второе условие, о расположении цифр в записи числа порядке убывания слева направо, получим **721; 841; 961; 421; 541.** Других вариантов нет.

ОТВЕТ. 721; 841; 961; 421; 541.

ЗАДАЧА 5. Найдите четное четырехзначное натуральное число, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. $abcd$ – данное четырехзначное число. Так как число четное, то на последнем месте может стоять цифра 0; 2; 4; 6; 8.

0 в записи числа присутствовать не может, т.к. произведение всегда будет равно 0 и не будет равно сумме цифр.

Остаются цифры 2; 4; 6; 8. $a + b + c + d = a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Начнем с первой цифры – 2. Число принимает вид $abc2$.

Тогда $a + b + c + 2 = a \cdot b \cdot c \cdot 2$. Так как ничего не сказано о повторении цифр, то цифры могут повторяться. Один из вариантов $a = 1, b = 1, c = 4$. Число **1142**, $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 1 + 1 + 4 + 2$; $8 = 8$.

Так как цифры подобраны, то теперь можно составить различные комбинации расположения этих цифр.

Получим – **1124; 1412; 4112; 2114; 1214.**

ОТВЕТ. **1124; 1412; 4112; 2114; 1214; 1142.**

ЗАДАЧА 6. Найдите четырехзначное натуральное число, большее 2200, но меньше 3000, которое делиться на каждую свою цифру, и все цифры которого различны. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. $2200 < \overline{abcd} < 3000.$

Так как все цифры различны, то числа вида $\overline{22cd}$ не может быть.

Пусть $\mathbf{b} = 3$, тогда $\overline{23cd}$, значит, обязательно это число должно делиться на 2, т.е. оно четное и должно делиться на 3, т.е. сумма цифр числа

$2 + 3 + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ – должна делиться на 3.

Вместо $\mathbf{d}$ можно взять 4; 6; 8.

Пусть $\mathbf{d} = 4$, тогда $\overline{23c4}$, $2 + 3 + \mathbf{c} + 4 = 9 + \mathbf{c}$.

Получается, что $\mathbf{c} = 3$ ($9 + 3 = 12$) или $\mathbf{c} = 6$ ($9 + 6 = 15$)

или $\mathbf{c} = 9$ ($9 + 9 = 18$). Чтобы цифры были различными необходимо выбрать $\mathbf{6}$, тогда число $\mathbf{2364}$. Это число делиться на каждую свою цифру. Также решением этой задачи могут быть числа – $\mathbf{2316}$; $\mathbf{2436}$; $\mathbf{2916}$.

ОТВЕТ. $\mathbf{2364}$; $\mathbf{2316}$; $\mathbf{2436}$; $\mathbf{2916}$.

ЗАДАЧА 7. Вычеркните в числе **45 341 527** три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 22. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. Чтобы число делилось на 22, оно должно делиться на 2 и на 11 ($22 = 2 \cdot 11$).

Таким образом, это число четное.

Из восьмизначного числа оно должно стать пятизначным. Вычеркивая цифры необходимо проверять признак делимости на 11.

Вычеркнем 7, получим - **45 341 52** и еще две цифры **1** и **5**,
получим **45 342**.

Проверим делимость на 11: $4 + 3 + 2 = 5 + 4$, $9 = 9$. Равенство верно, это число нам подходит.

Другой вариант решения – вычеркнуть цифры **4; 4** и **7**,
получим – **53 152**.

Проверяем делимость на 11: $5 + 1 + 2 = 3 + 5$, $8 = 8$. Опять равенство верно, значит, это число то же может являться решением задачи.

ОТВЕТ. **45 342; 53 152; 45 452.**

ЗАДАЧА 8. Вычеркните в числе **75 416 303** три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 30. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. Так как число должно делиться на 30, то оно должно делиться на 3 и на 10 (**$30 = 3 \cdot 10$**).

Теория. Число делиться на 10, если запись числа оканчивается цифрой 0.

Поэтому обязательно нужно вычеркнуть крайнюю правую цифру **3**, получим **7 541 630**.

Вычеркивая еще две цифры помним, что сумма оставшихся цифр должна делиться на 3.

Получим **75 630** ($7 + 5 + 6 + 3 + 0 = 21$) или

54 630 ($5 + 4 + 6 + 3 + 0 = 18$).

Решение можно продолжить и получить другие решения.

ОТВЕТ. **75 630; 54 630; 74 160; 51 630; 74130.**

ЗАДАЧА 9. Цифры четырехзначного натурального числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырехзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 2628. Приведите пример такого числа.

РЕШЕНИЕ. Данное четырехзначное число $\overline{abcd}$.

Теория. Число делится на 5, если запись числа оканчивается цифрой 5 или 0.

Значит, $d = 5$ или $d = 0$.

0 взять не можем, потому что в обратном порядке записать число не удастся.

Остается, что $d = 5$, тогда число имеет вид $\overline{abc5}$, а в обратном порядке $\overline{5bcd}$.

Запишем каждое из этих чисел в виде суммы разрядных слагаемых:

$$\overline{abc5} = 1000a + 100b + 10c + 5 \text{ и}$$

$$\overline{5bcd} = 5000 + 100c + 10b + a.$$

Составим разность этих чисел:

$$\begin{aligned} \overline{abc5} - \overline{5bcd} &= 1000a + 100b + 10c + 5 - (5000 + 100c \\ &+ 10b + a) = 1000a + 100b + 10c + 5 - 5000 - 100c - \\ &10b - a = 999a + 90b - 90c - 4995. \end{aligned}$$

$$999a + 90b - 90c - 4995 = 2628.$$

$999a + 90b - 90c = 7623$, разделим почленно это равенство на 9.

$$111a + 10b - 10c = 847.$$

$$10b - 10c = 847 - 111a.$$

Вместо **a** нужно взять цифру, которая позволит получить в правой части равенства круглое число (число, которое делиться на 10).

Таким числом может быть **a = 7**,
получим $10b - 10c = 847 - 777$,
тогда $10b - 10c = 70$, а теперь почленно разделим это равенство на 10.

Получим $b - c = 7$. Т.е. **b** больше, чем **c** на 7. Это могут быть числа **b = 9** и **c = 2** или **b = 8** и **c = 1** и еще один вариант **b = 7** и **c = 0**.

Получаются числа **7925; 7815** или **7705**.

ОТВЕТ. 7925; 7815; 7705.

***Хочу пожелать вам удачи
и успеха на экзамене.***

Спасибо за внимание.