

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

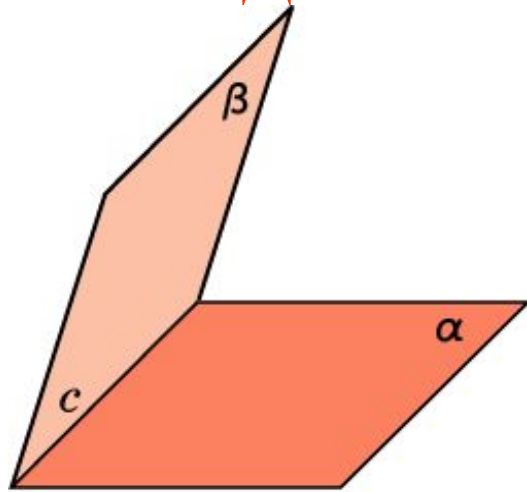


Рис. 1

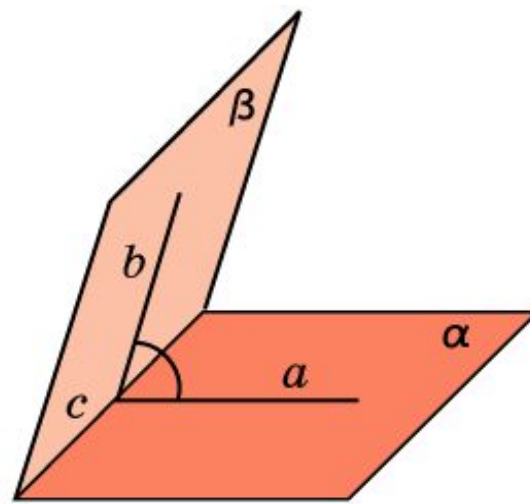


Рис. 2

Двугранным углом называется фигура (рис. 1), образованную двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

Линейным углом двугранного угла называется угол, полученный в результате пересечения данного двугранного угла и какой-нибудь плоскости, перпендикулярной его ребру (рис. 2).

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Упражнение 1

Какой угол образует ребро двугранного угла с любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?

Ответ: 90° .

Упражнение 2

Плоскости двух равнобедренных треугольников с общим основанием образуют двугранный угол. Верно ли утверждение о том, что высоты, проведенные к общему основанию треугольников, образуют линейный угол двугранного угла?

Ответ: Да.

Упражнение 3

Треугольник MAV и квадрат $ABCD$ заданы таким образом, что MB - перпендикуляр к плоскости квадрата. Какой угол можно считать углом между плоскостями AMD и ABC ?

Ответ: MBC .

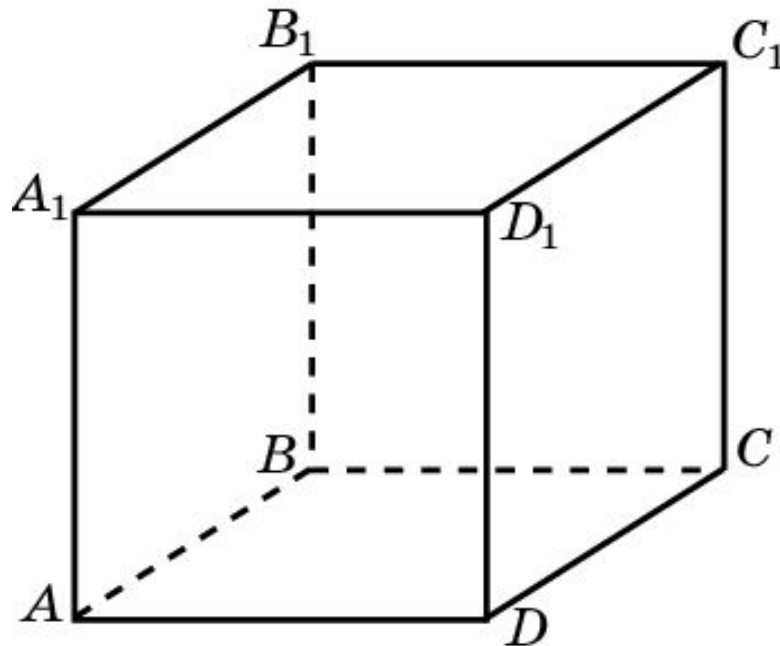
Упражнение 4

В правильной треугольной призме найдите угол между боковыми гранями.

Ответ: 60° .

Упражнение 5

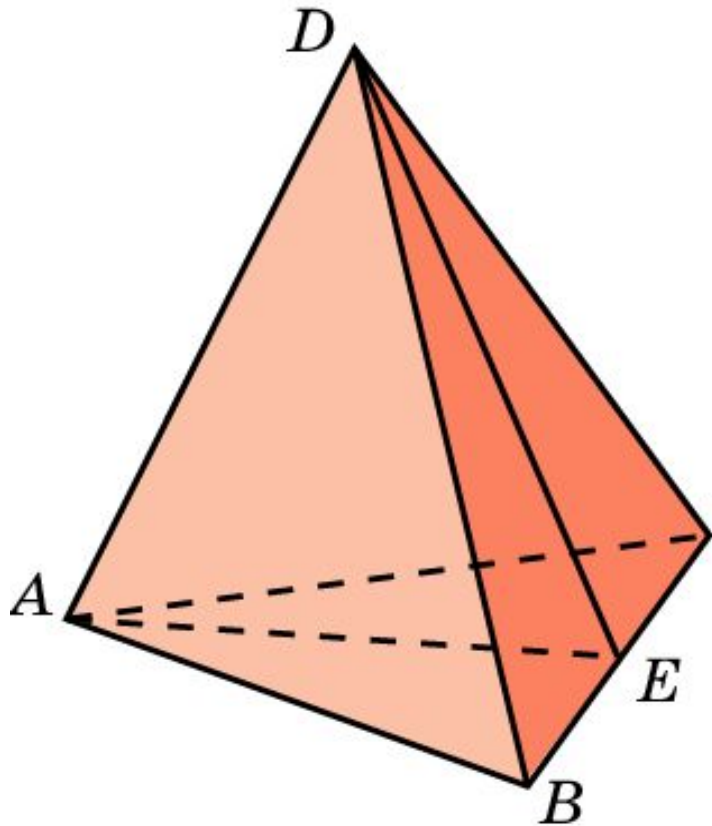
В кубе $A...D_1$ найдите угол наклона плоскости ABC_1 к плоскости ABC .



Ответ: 45° .

Упражнение 6

Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.



Решение: Пусть $ABCD$ – правильный тетраэдр с ребром 1. Из вершин A и D опустим перпендикуляры AE и DE на ребро BC . Угол AED будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике ADE имеем:

$$AD = 1, AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = \frac{1}{3}. \text{ Откуда } \varphi \approx 70^\circ 30'.$$

Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi \approx 70^\circ 30'$.

Упражнение 7

Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей.

Ответ: Две биссектральные плоскости.

Упражнение 8

Через сторону BC треугольника ABC проведена плоскость α под углом 30° к плоскости треугольника. Высота AD треугольника ABC равна a . Найдите расстояние от вершины A треугольника до плоскости α .

Ответ: $\frac{a}{2}$.

Упражнение 9

Через катет $BC=a$ равнобедренного прямоугольного треугольника ABC (угол C равен 90°) проведена плоскость α , образующая с плоскостью треугольника угол 30° . Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

Ответ: $\frac{a}{2}$.

Упражнение 10

Через сторону BC треугольника ABC проведена плоскость под углом 30° к плоскости треугольника; угол C равен 150° , $AC = 6$. Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости.

Ответ: 1,5.

Упражнение 11

Дан квадрат $ABCD$, через вершину D параллельно диагонали AC проведена плоскость α , образующая с диагональю BD угол 60° . Чему равен угол между плоскостью квадрата и плоскостью α ?

Ответ: 60° .

Упражнение 12

Основанием высоты четырехугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды является: а) квадрат; б) параллелограмм; в) ромб; г) равнобедренная трапеция?

Ответ: а) Да; б) нет; в) да; г) нет.

Упражнение 13

В основании прямой призмы параллелограмм со сторонами 4 дм и 5 дм. Угол между ними 30° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, если известно, что она пересекает все боковые ребра и образует с плоскостью основания угол 45° .

Ответ: $10\sqrt{2}$ дм².

Упражнение 14

Боковое ребро прямой призмы равно 6 см. Ее основание – прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 2 см. Найдите площади сечений призмы плоскостями, проходящими через каждый из данных катетов и образующими углы 60° с плоскостью основания.

Ответ: 6 см².

Упражнение 15

Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины двух сторон основания и образующей угол 45° с его плоскостью, если известно, что плоскость пересекает: а) только одно боковое ребро призмы; б) два ее боковых ребра.

Ответ: а) $\sqrt{6}$; б) $3\sqrt{6}$.

Упражнение 16

Ребро куба равно a . Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону основания, если угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен: а) 30° ; б) φ .

Ответ: а) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{a^2}{\cos \varphi}$.

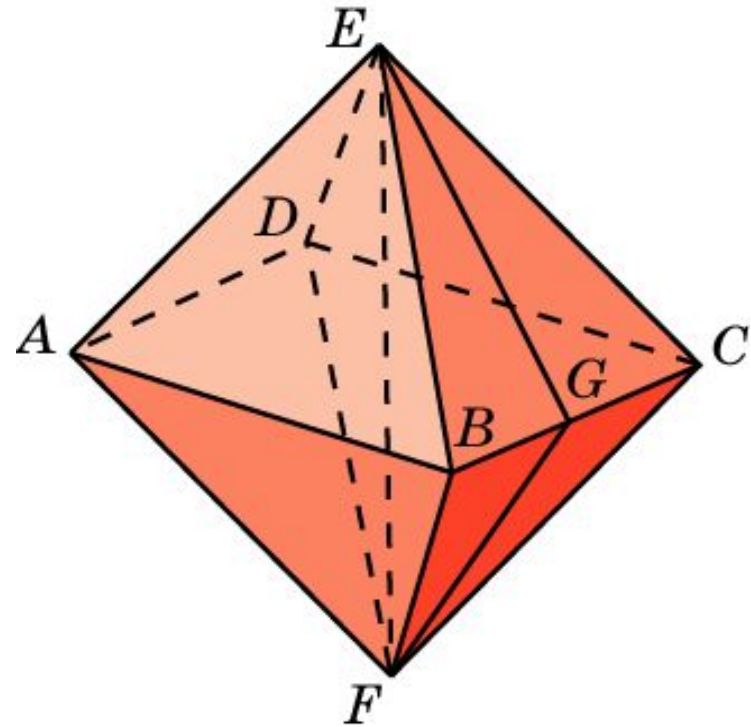
Упражнение 17

Через середины двух смежных сторон основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол φ и пересекающая три боковых ребра призмы. Найдите сторону основания, если площадь сечения равна Q .

Ответ: $\sqrt{\frac{2Q \cdot \cos \varphi}{7}}.$

Упражнение 18

Найдите двугранные углы октаэдра.



Решение: Рассмотрим правильный октаэдр с ребром 1. Из вершин E и F опустим перпендикуляры EG и FG на ребро BC . Угол EGF будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике EGF имеем:

$$EF = \sqrt{2}, \quad EG = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

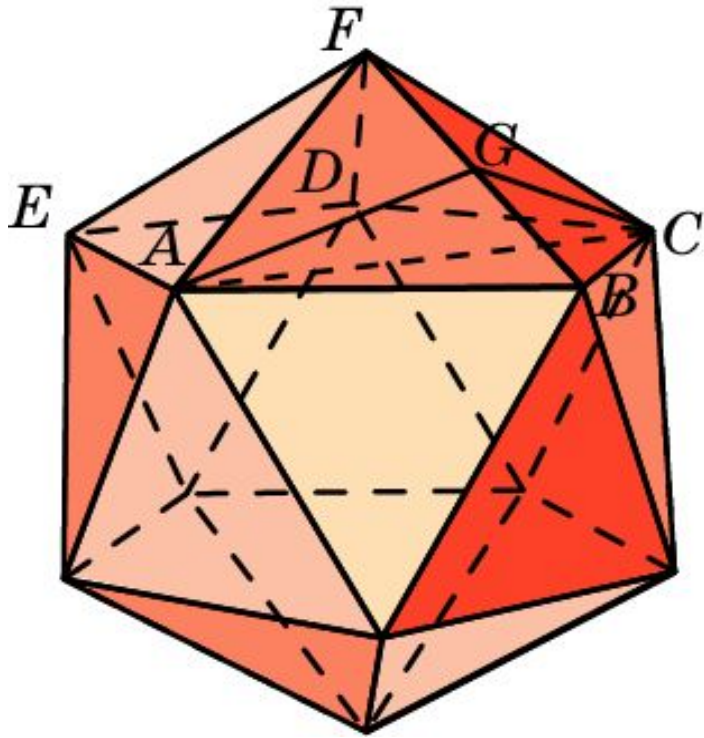
Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = -\frac{1}{3}. \quad \text{Откуда } \varphi \approx 109^\circ 30'.$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$, $\varphi \approx 109^\circ 30'$.

Упражнение 19

Найдите двугранные углы икосаэдра.



Решение: Рассмотрим правильный икосаэдр с ребром 1. Из вершин A и C опустим перпендикуляры AG и CG на ребро BF . Угол AGC будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике AGC имеем:

$$AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad EG = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

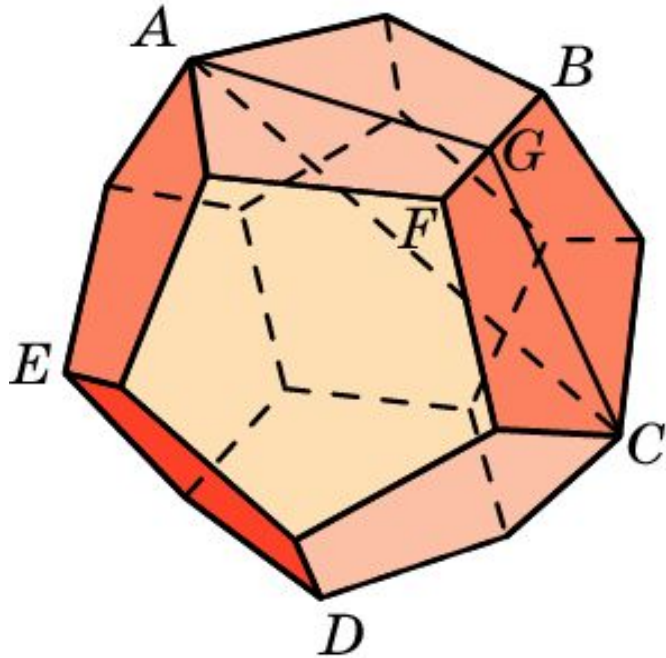
Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}. \quad \text{Откуда } \varphi \approx 138^\circ 11'.$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \varphi \approx 138^\circ 11'.$

Упражнение 20

Найдите двугранные углы додекаэдра.



Решение: Рассмотрим правильный додекаэдр с ребром 1. Из вершин A и C опустим перпендикуляры AG и CG на ребро BF . Угол AGC будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике AGC имеем:

$$AC = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}, \quad EG = FG = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 5}}{2}.$$

Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \quad \text{Откуда } \varphi \approx 116^\circ 34'.$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \varphi \approx 116^\circ 34'.$