



# 21.5. ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Уравнение вида*

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

*называется ДУ второго порядка.*

где  $x$  — независимая переменная;

$y$  — неизвестная функция;

$y'$  и  $y''$  — ее первая и вторая производные.





Будем рассматривать уравнения второго порядка,  
разрешенные относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y')$$

6

*Решением ДУ второго порядка называется  
функция  $y=\varphi(x)$ , определенная на  
некотором интервале  $(a,b)$ , которая  
при подстановке ее в уравнение  
обращает его в тождество.*





## ТЕОРЕМА КОШИ

(о существовании и единственности решения ДУ)

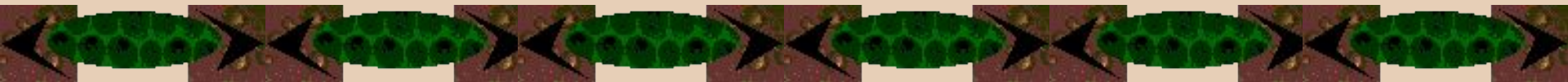
Пусть дано ДУ (6). Если функция  $f(x, y, y')$  и ее частные производные  $f'_y$  и  $f'_{y'}$  непрерывны в некоторой области  $D$  пространства переменных  $(x, y, y')$ , то для любой внутренней точки  $(x_0, y_0, y'_0)$  этой области существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям  $x=x_0, y=y_0, y'=y'_0$

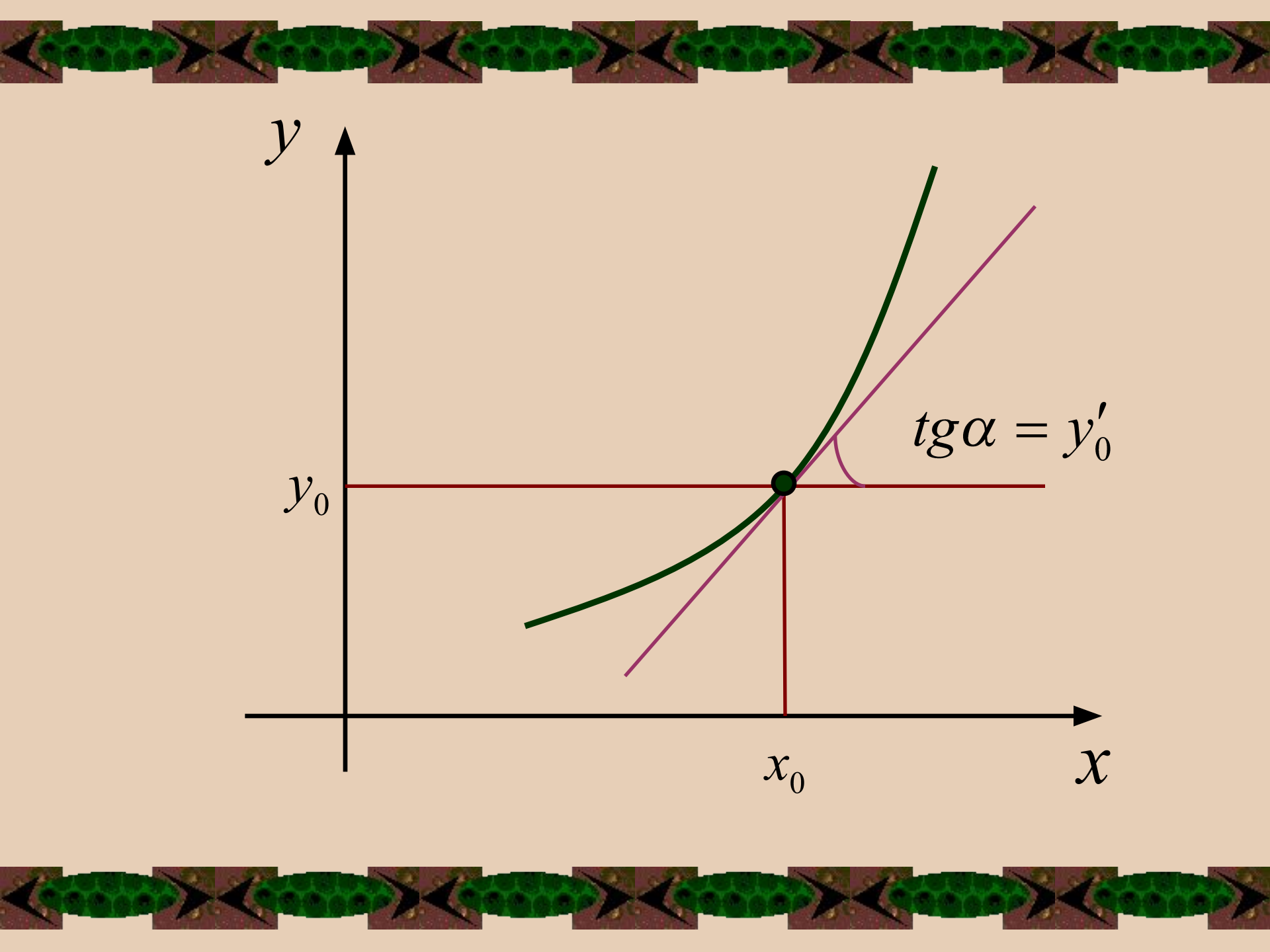




# Геометрический смысл теоремы Коши

Через заданную точку  $(x_0, y_0)$  на плоскости  $XOY$  проходит единственная интегральная кривая с заданным значением углового коэффициента касательной  $y'_0$ .







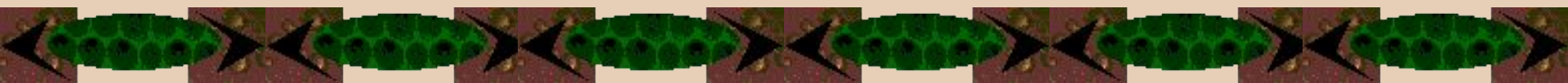
Общим решением уравнения (6) в некоторой области  $D$  называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

удовлетворяющая этому уравнению при произвольных значениях  $C_1$  и  $C_2$ .

Частным решением уравнения (6) называется общее решение, взятое при фиксированных значениях этих постоянных:

$$y = \varphi(x, C_0^1, C_0^2)$$





# Пример.

Рассмотрим уравнение

$$y'' = 0$$

Его общее решение получается при двукратном интегрировании:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int y' dy = \int dx \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad y' = C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \quad \Rightarrow \quad dy = C_1 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int C_1 \cdot dx$$




$$y = C_1 \cdot x + C_2$$

**Найдем частное решение уравнения при**

$$y|_{x=1} = 2 \quad y'|_{x=1} = 1$$

**Подставляем в общее решение:**

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

**Частное решение будет иметь вид:**

$$y = x + 1$$

