

Доказательство методом бесконечно малых

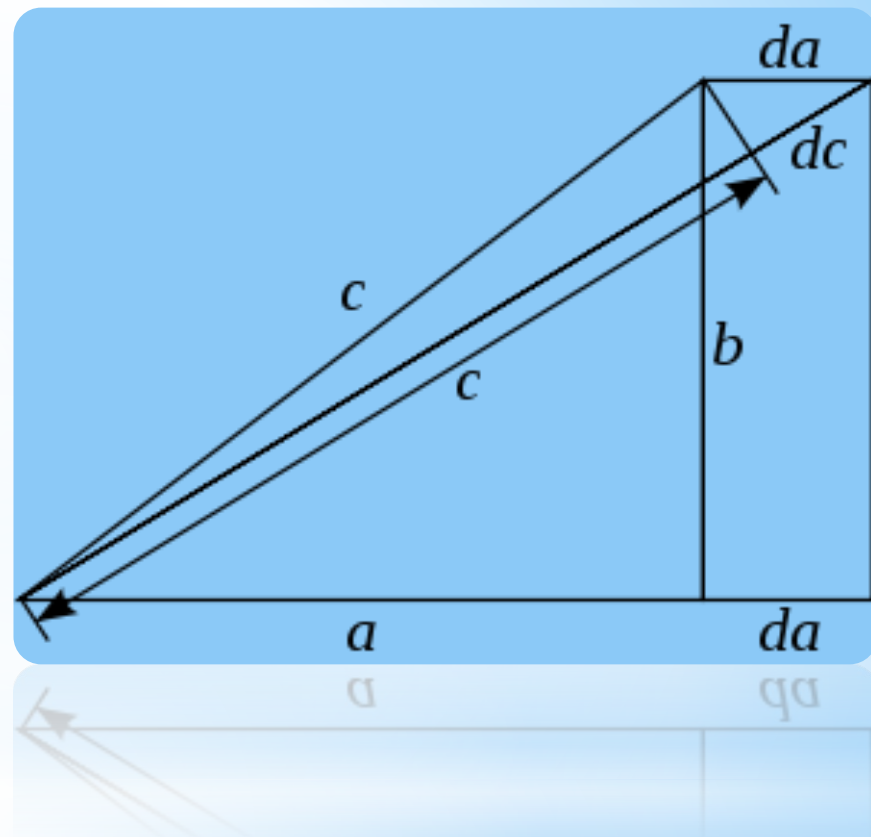
Теорема Пифагора

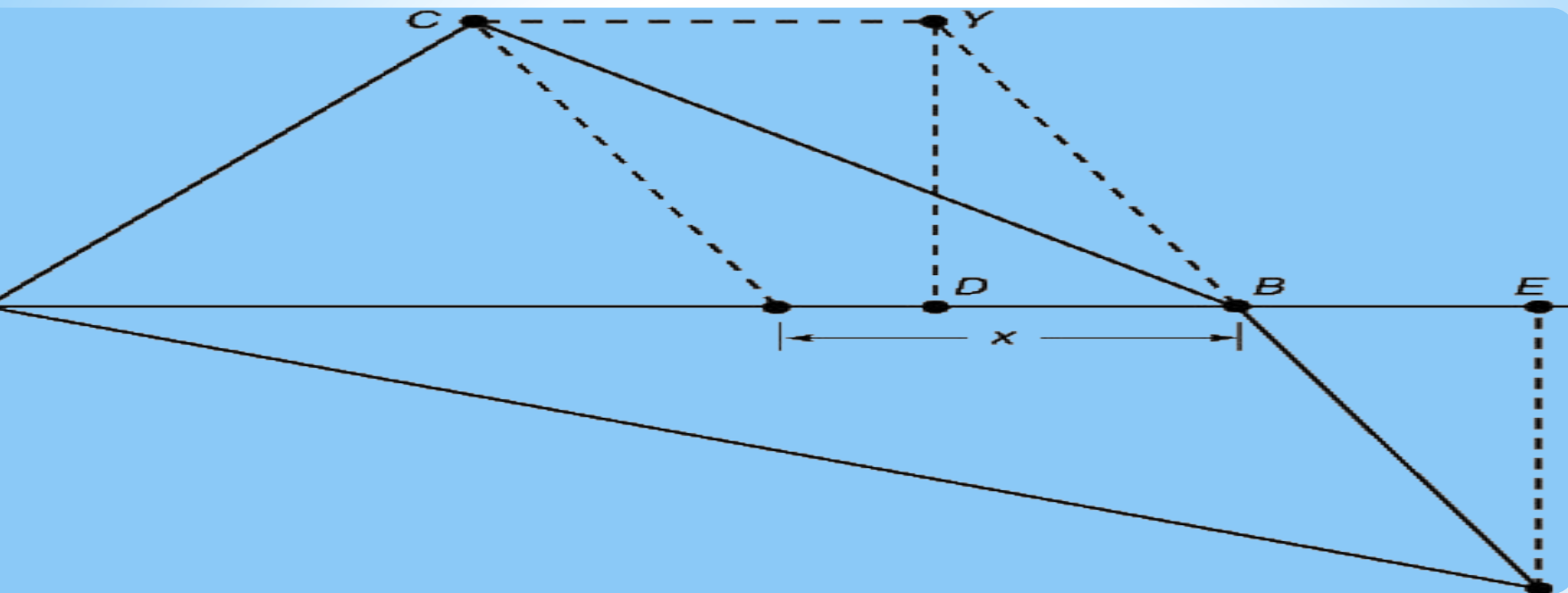
Следующее доказательство при помощи дифференциальных уравнений часто приписывают известному английскому математику Харди, жившему в первой половине XX века.

Рассматривая чертёж, показанный на рисунке, и наблюдая изменение стороны a , мы можем записать следующее соотношение для бесконечно малых приращений сторон c и a (используя подобие треугольников): $da/dc = c/a$

Доказательство методом бесконечно малых.

Пользуясь методом разделения переменных, находим $c\,dc = a\,da$





Более общее выражение для изменения гипотенузы в случае приращений
 обоих катетов $dc = a da + b db$. Интегрируя данное уравнение и используя
 начальные условия, получаем

$$c^2 = a^2 + b^2 + \text{constant} \quad a=b=c=0, \text{ следовательно } \text{constant}=0$$

Таким образом, мы приходим к желаемому ответу $c^2 = a^2 + b^2$.

Как нетрудно видеть, квадратичная зависимость в окончательной формуле появляется благодаря линейной пропорциональности между сторонами треугольника и приращениями, тогда как сумма связана с независимыми вкладами от приращения разных катетов.

Более простое доказательство можно получить, если считать, что один из катетов не испытывает приращения (в данном случае катет a). Тогда для константы
*интегрирования получим $a=0$, следовательно $c^2 = b^2 = constant$.