

Лекция № 7

Динамические характеристики измерительных систем

Импульсной характеристикой стационарной измерительной системы, описываемой оператором T , называют функцию $g(t)$ являющуюся откликом системы на входной сигнал в виде дельта-функции:

$$g(t) = T\delta(t)$$

Поскольку в частотной области связь между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе и частотной характеристикой системы описывается выражением:

$$S_g(j\omega) = K(j\omega)S_\delta(j\omega),$$

то с учетом:

$$S_\delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1,$$

$$S_g(j\omega) = K(j\omega).$$

Динамические характеристики измерительных систем

Импульсная характеристика системы

Частотная характеристика и импульсная характеристика линейной стационарной системы связаны между собой прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega ,$$

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt .$$

Зная функцию $K(j\omega)$, всегда можно определить импульсную характеристику и наоборот. Таким образом, любую систему можно рассматривать либо во временной области с помощью ее импульсной характеристики, либо в частотной области, анализируя $K(j\omega)$.

Динамические характеристики измерительных систем

Переходная характеристика системы

Если на вход линейной стационарной системы, описываемой оператором T , воздействует сигнал, отображаемый единичной функцией (функцией Хевисайда) $1(t)$, то выходную реакцию $h(t) = T[1(t)]$ называют *переходной характеристикой системы*.

Можно показать, что между импульсной и переходной характеристиками имеется тесная связь – импульсная характеристика является производной от переходной характеристики:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} .$$

Динамические характеристики измерительных систем

Если входной сигнал представить в виде:

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau ,$$

То отвечающая ему выходная реакция линейной стационарной системы запишется:

$$u_{\text{вых}}(t) = Tu_{\text{вх}}(t) = T \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau .$$

Учитывая, что оператор T воздействует лишь на величины, зависящие от текущего времени t , но не от переменной интегрирования τ , получаем:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) T \delta(t - \tau) d\tau .$$

Динамические характеристики измерительных систем

Интеграл Дюамеля

Соотношение, называемое интегралом Дюамеля, имеет вид:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Соотношение показывает, что выходной сигнал линейной стационарной системы представляет собой *свертку* двух *функций*: входного сигнала и импульсной характеристики системы. Для реальных систем (физически реализуемых) всегда выполняется условие: $g(t - \tau) = 0$ при $t < \tau$, так как реакция такой системы на входное воздействие не может опережать само входное воздействие.

Следовательно, можно записать интеграл Дюамеля в виде:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_0^t u_{\text{вх}}(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Динамические характеристики измерительных систем

Передаточная функция системы

Решение дифференциального уравнения линейной системы, связывающего входные воздействия и выходные сигналы, может быть осуществлено *операторным методом* с помощью интегрального преобразования Лапласа.

Изображение по Лапласу входного и выходного сигналов имеет вид:

$$L[u_{\text{вх}}(t)] = U_{\text{вх}}(p) = \int_0^{\infty} u_{\text{вх}}(t) e^{-pt} dt; \quad L[u_{\text{вых}}(t)] = U_{\text{вых}}(p) = \int_0^{\infty} u_{\text{вых}}(t) e^{-pt} dt$$

Вычислив преобразование Лапласа от обеих частей дифференциального уравнения линейной системы, получим:

$$U_{\text{вых}}(p) \left[a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n \right] = U_{\text{вх}}(p) \left[b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m \right].$$

Динамические характеристики измерительных систем

Передаточная функция системы

Введем отношение изображений по Лапласу выходного и входного сигналов, называемое *передаточной функцией* или *операторным коэффициентом передачи* системы:

$$H(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}$$

Если передаточная функция системы известна, то поиск выходной реакции системы на заданное входное воздействие разбивается на три этапа:

1. $u_{\text{вх}}(t) \rightarrow U_{\text{вх}}(p)$
2. $U_{\text{вых}}(p) = H(p)U_{\text{вх}}(p)$
3. $U_{\text{вых}}(p) \rightarrow u_{\text{вых}}(t)$

Динамические характеристики измерительных систем

Сигнал на выходе системы находят с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} U_{\text{вых}}(p) e^{pt} dt = \sum_{i=1}^n \operatorname{res} \left[U_{\text{вых}}(p) e^{pt} \right] \Big|_{p=p_i}$$

Как известно, способ нахождения оригинала выходного сигнала по его изображению с помощью теоремы о вычетах без вычисления интеграла основан на представлении подынтегрального выражения в виде отношения двух многочленов $\varphi(p)/\psi(p)$, определении полюсов p_i подынтегральной функции и вычислении $u_{\text{вых}}(t)$ по сумме вычетов $\varphi(p)/\psi(p)$ в соответствующих полюсах:

$$u_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^n \operatorname{res} \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \Big|_{p=p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(p_i)}{\psi'(p_i)} .$$

Динамические характеристики измерительных систем

При определении *передаточных функций* сложных систем, состоящих из ряда отдельных звеньев (преобразователей, функциональных блоков), вначале определяют передаточные функции отдельных звеньев. Далее, если эти звенья соединены последовательно, определяют общую передаточную функцию системы по формуле:

$$H(p) = \prod_{i=1}^n H_i(p) ,$$

где $H_i(p)$ - передаточные функции отдельных звеньев. Если звенья какой-либо системы соединены параллельно, то расчет результирующей передаточной функции этой части системы осуществляют по формуле:

$$H(p) = \sum_{i=1}^k H_i(p)$$

Динамические характеристики измерительных систем

Пример. Определить форму сигнала на выходе кремниевого диффузионного детектора, вызванного регистрацией α -частицы, создавшей заряд q_0 в рабочем объеме детектора.

Дифференциальное уравнение цепи, полученное из анализа эквивалентной схемы детектора, имеет вид:

$$C_{\Sigma} \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R_H} = I_0(t),$$

где R_H - резистор, включаемый в цепь для управления длительностью импульса; C_{Σ} - эквивалентная емкость, равная сумме собственной емкости детектора, входной емкости усилителя и емкости соединительного кабеля.

В операторном виде уравнение записывается так:

$$\frac{u(p)}{R_H} + pC_{\Sigma}u(p) = i_0(p) .$$

Динамические характеристики измерительных систем

При условии локализации ионизационного эффекта при регистрации α -частицы и пренебрежимо малом времени собирания носителей зарядов импульс тока можно представить в виде: $I_0(t) = q_0 \delta(t)$.

Так как $L[\delta(t)] = 1$, уравнение в операторном виде запишется:

$$u(p) = \frac{q_0 R_H}{1 + p\tau_0}$$

Вычисляя оригинал выходного сигнала по его изображению, получим:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} \frac{q_0 R_H}{1 + p\tau_0} e^{pt} dt = q_0 R_H \sum_{p=p_0} \operatorname{res} \left[\frac{e^{pt}}{1 + p\tau_0} \right]_{p_0 = -1/\tau_0} = \\ &= q_0 R_H \frac{e^{-t/\tau_0}}{\tau_0} = \frac{q_0}{C_{\Sigma}} e^{-t/\tau_0}. \end{aligned}$$