

Чотирикутники



Зміст

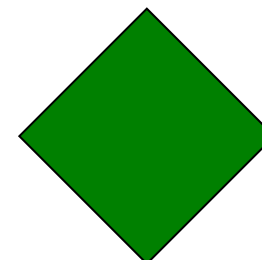
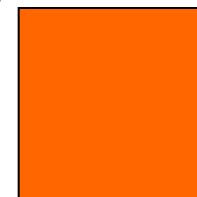
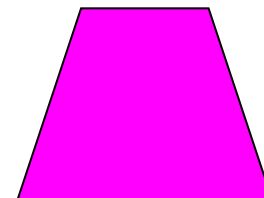
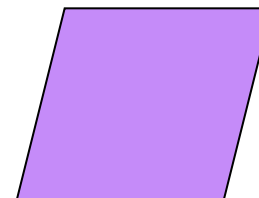
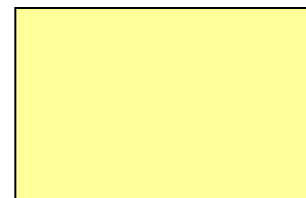
1. Основні поняття
2. Властивості чотирикутників
3. Описані чотирикутники
4. Коло, описане навколо чотирикутника
5. Паралелограм та його властивості
6. Ознаки паралелограма
7. Висота та площа паралелограма
8. Ромб та його властивості
9. Площа ромба
10. Коло, вписане у ромб
11. Прямокутник та його властивості
12. Квадрат та його властивості
13. Трапеція. Основні поняття
14. Властивості трапеції
15. Учнівська сторінка



Основні поняття

- Чотирикутником називається фігура, що складається з чотирьох точок (вершин) та чотирьох послідовно з'єднуючих їх відрізків (сторін). При цьому ніякі три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а з'єднуючі їх відрізки не повинні перетинатися.

- Чотирикутник називається **опуклим**, якщо він розташований в одній півплощині відносно прямої, яка містить будь-яку його сторону



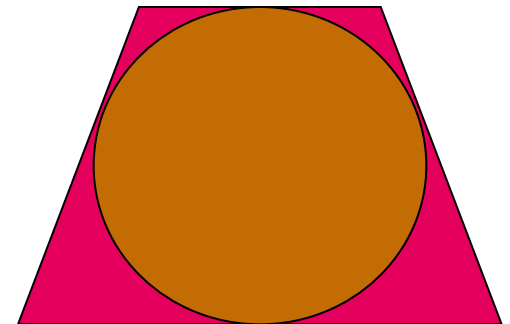
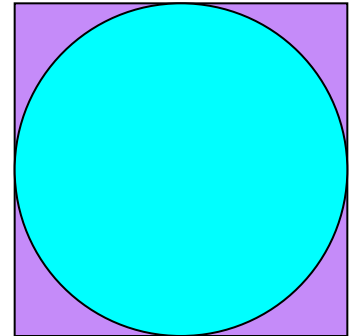
Властивості чотирикутників

- Коло, яке є дотичною до всіх сторін чотирикутника, називається вписаним у цей чотирикутник.
- Коло, що містить всі вершини чотирикутника, називається описаним навколо цього чотирикутника.
- Сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360 градусів.
- Площа опуклого чотирикутника: $S = (d_1 \cdot d_2) / 2 \sin \beta$, де d_1, d_2 — діагоналі чотирикутника; β — кут між діагоналями



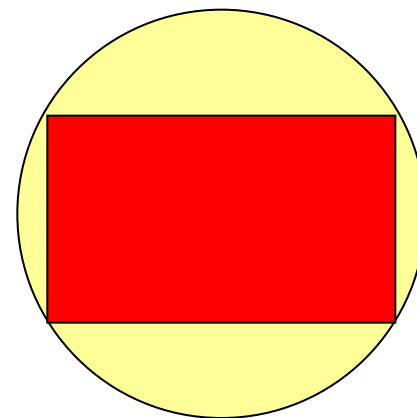
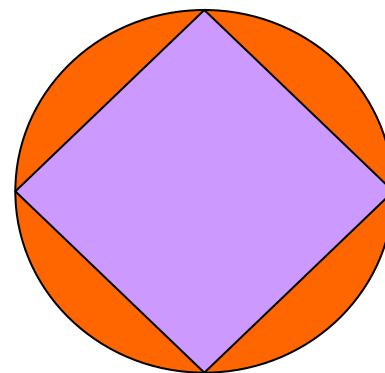
Описані чотирикутники

- Якщо у чотирикутнику суми довжин протилежних сторін рівні, то у нього можна вписати коло
- Центр вписаного у чотирикутник кола є точкою перетину всіх чотирьох бісектрис кутів цього чотирикутника
- Точки дотику вписаного кола відтинають рівні відрізки від кутів чотирикутника
- Площа описаного чотирикутника: $S = pr$, де r — радіус вписаного кола; $p = (a + b + c + d) / 2$.



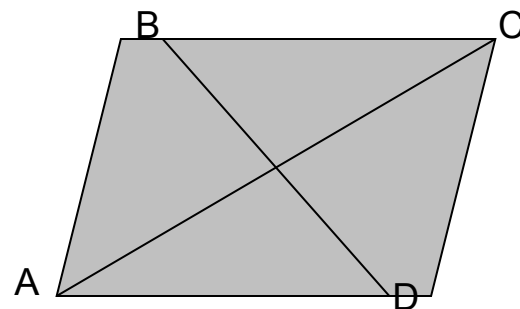
Коло, описане навколо чотирикутника

- Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180 градусів, то навколо нього можна описати коло
- Центр описаного навколо чотирикутника кола є точкою перетину всіх серединних перпендикулярів сторін цього чотирикутника
- Сума добутків протилежних сторін вписаного у коло чотирикутника дорівнює добутку його діагоналей



Паралелограм та його властивості

- Чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні, називається **паралелограмом**
- Середина діагоналей паралелограма є його центром симетрії
- Протилежні сторони рівні
- Протилежні кути рівні
- Сума кутів, що прилягають до будь-якої сторони, дорівнює 180 градусів
- Діагоналі паралелограма перетинаються і у точці перетину діляться навпіл
- Кожна діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутника
- Дві діагоналі паралелограма ділять його на 4 рівновеликих трикутника
- Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін



Ознаки паралелограма

- Якщо у чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм
- Якщо у чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм
- Чотирикутник, діагоналі якого у точці перетину діляться навпіл, — паралелограм



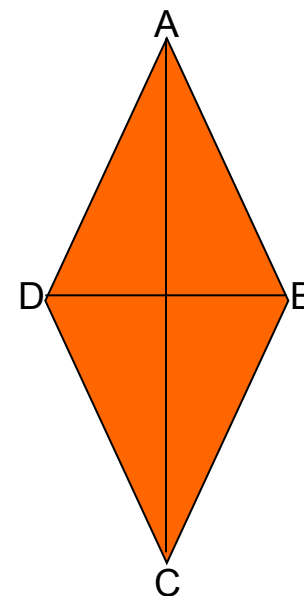
Висота та площа паралелограма

1. Висота паралелограма — це перпендикуляр, проведений з вершини цього паралелограма на протилежну сторону
2. Площу паралелограма можна визначити:
 - Через сторону паралелограма та проведену до неї висоту: $S = a \cdot h$
 - Через дві сторони паралелограма та кут між ними: $S = ab \sin \beta$
 - Через діагоналі паралелограма та кут між ними: $S = (ef \sin \alpha) / 2$



Ромб та його властивості

- Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається **ромбом**
- Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом
- Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів
- У будь-який ромб можна вписати коло з центром у точці перетину його діагоналей

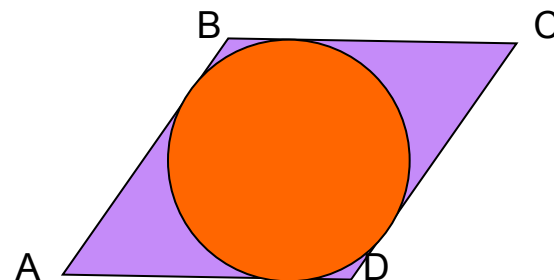


Площа ромба

- Площа ромба може бути визначена:
 1. Через діагоналі: $S = (d_1 \cdot d_2) / 2$
 2. Через сторону та кут ромба: $S = a^2 \sin a$
 3. Через сторону та висоту: $S = ah$
 4. Через сторону та радіус вписаного кола: $S = 2ar$

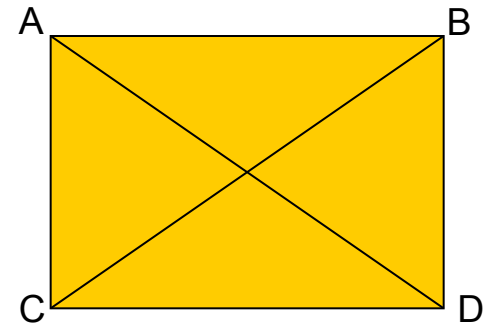
Коло, вписане у ромб

- Радіус кола, вписаного у ромб можна знайти:
 1. Через висоту ромба: $r = h/2$
 2. Через діагоналі ромба та сторону: $r = (d_1 \cdot d_2) / 4a$
 3. Через відрізки, на які ділить сторону ромба точка дотику: $r^2 = BE \cdot EC$



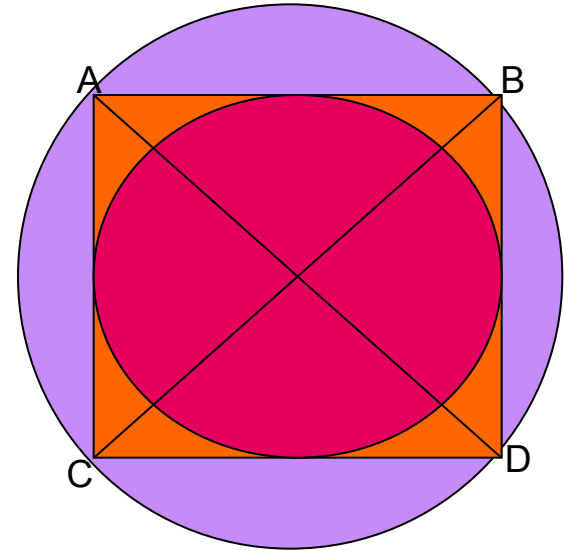
Прямокутник та його властивості

- **Прямокутник** — це паралелограм, у якого всі кути прямі
- 1. Діагоналі прямокутника рівні та у точці перетину діляться навпіл
- 2. Прямокутник має дві осі симетрії, які співпадають з серединними перпендикулярами до його сторін
- 3. Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло з центром у точці перетину діагоналей та радіусу, що дорівнює половині діагоналі
- 4. Площу прямокутника можна визначити:
 - Через його сторони: $S=ab$
 - Через діагоналі та кут між ними: $S=(d^2 \sin \beta)/2$



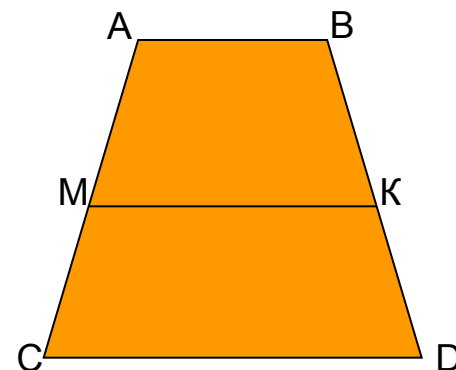
Квадрат та його властивості

- **Квадрат** — це прямокутник, у якого всі сторони рівні
- У квадрата всі кути прямі
- Діагоналі квадрата рівні та перетинаються під прямим кутом
- Квадрат має 4 осі симетрії
- У квадраті центри вписаного та описаного кіл співпадають та знаходяться у точці перетину його діагоналей
- Радіус описаного кола: $R = a\sqrt{2}/2$
- Радіус вписаного кола: $r = a/2$
- Площа квадрата: $S = a^2$
- Послідовно з'єднані відрізками середини сусідніх сторін квадрата утворюють квадрат



Трапеція. Основні поняття

- **Трапеція** — це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні
- Паралельні сторони називаються основами трапеції
- Непаралельні сторони називаються бічними сторонами
- **Середня лінія трапеції** — це відрізок, який сполучає середини бічних сторін
- **Рівнобічна трапеція** — трапеція, у якої бічні сторони рівні
- **Прямокутна трапеція** — трапеція, у якої одна бічна сторона перпендикулярна основам



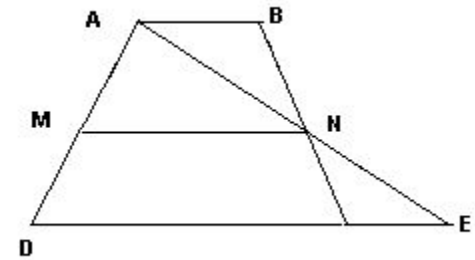
Властивості трапеції

- Коло можна вписати у трапецію, якщо сума її бічних сторін дорівнює сумі основ
- Центр вписаного у трапецію кола — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів
- Радіус вписаного кола дорівнює половині висоти:
$$r = h/2$$
- Середня лінія трапеції паралельна основам та дорівнює їх півсумі
- У рівнобічної трапеції:
 1. Кути при основі рівні
 2. Діагоналі рівні
- Площу трапеції можна визначити:
 - Через півсуму основ та висоту: $S = (a + b)/2 \cdot h$
 - Через діагоналі та кут між ними: $S = 1/2 \cdot d_1 d_2 \cdot \sin \alpha$



Учні́вська сторінка

Дано: $ABCD$ – трапеція
 MN – середня лінія
Довести: $MN = \frac{1}{2}(CD + AB)$



Рішення

Добудуємо трикутник ADE так, щоб однією стороною служила сторона трапеції, а третя вершина трикутника (E) розміщувалася на продовженні нижньої основи трапеції. Одна сторона трикутника проходить через точку перетину середньої лінії трапеції і сторони трапеції (N)

$\triangle ABN = \triangle CEN$ за 2 ознакою рівності трикутників. З рівності трикутників випливає рівність сторін $AB = CE$ і $AN = EN$. Середня лінія трапеції є середньою лінією даного трикутника, отже середня лінія трикутника визначається як $MN = \frac{1}{2} DE$. Середня лінія трапеції MN тоді може бути виражена через її основи: $MN = \frac{1}{2}(CD + CE) = \frac{1}{2}(CD + AB)$.