

5. Числовые характеристики случайных величин

параметр распределения

оценка параметра

меры положения (характеристики центра)

меры рассеяния (разброса, изменчивости)

характеристики формы

*среднее – центр группирования –
математическое ожидание*

взвешенное среднее

мода

медиана

унимодальное и бимодальное
распределения

отклонение от центра

асимметрия (skewness)

дисперсия (variance)

эксцесс

среднеквадратическое (стандартное)
отклонение

коэффициент вариации

моменты распределения

**ЗР исчерпывающе описывают СВ
и позволяют рассчитать вероятности любых
связанных с ними событий**

Однако:

- 1) Не всегда необходимы (кто лучше стреляет?)**
- 2) Полное описание относительно громоздко
при естественном стремлении уйти от «много чисел»
к «всего нескольким»**

**Нужен небольшой набор
чисел,
которые описывали бы
СВ лаконично**

Числовые характеристики [распределения] случайной величины – числа, характеризующие наиболее существенные черты распределения

ЧХ

*по
происхождению*

Теоретические –
рассматриваемые как
объективные, истинные
параметры распределений
– *детерминированные
значения*

Статистические
(выборочные) оценки
истинных параметров
– *случайные значения*

И параметры, и их оценки
разделяют на 3 группы
– *по существенной черте распределения,*
которую они выражают

*Меры положения –
(основной тенденции)*

*Характеристики
формы*

*Меры рассеяния
(изменчивости)*

Характеристики положения

Фиксируют место СВ на числовой оси.
Это некоторое *среднее значение*,
эталон, место нахождения,
вокруг которого *группируются* значения СВ

еще называют – «*центр группирования*», СРЕДНЕЕ

Используются как *представители СВ* в грубых,
прикидочных расчетах (например...)

Наиболее важное из средних – математическое
ожидание

*Математическое ожидание дискретной величины
есть сумма произведений всех ее значений
на вероятности этих значений*

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_m p_m = \sum_{i=1}^m x_i p_i$$

Другие обозначения : M_X , μ , (E, η)

Примеры

Примеры

М.о. числа очков, выбиваемых 1-ым стрелком:

$$M(X) = 1 \cdot 0.0 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.8 = 2.8$$

М.о. числа очков, выбиваемых 2-ым стрелком:

$$M(Y) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 2.1$$

Для любой биномиальной величины $M = np$

3.0

М.о. числа попаданий при $n = 4$ выстрелах с вероятностью попасть в каждом $p = 0.75$?

Математическое ожидание непрерывной СВ

Примеры на практике

$$M(X) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x \cdot f(x) dx$$

д р

или
в
общем
случае

Полезно
иметь
представление
о свойствах
матожидания

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Мода и Медиана

Другие характеристики центра

Mo – значение величины *X*, которому соответствует максимальная плотность распределения.
Для дискретной *X* – наиболее вероятное значение

$$f(Mo) = \max f(x) \quad Mo = x\{p_{i \max}\}, \quad i = 1, \dots, m$$

Me – значение величины *X*, для которого вероятность меньших значений равна вероятности больших

$$F(Me) = 0.5$$



Рассмотрели характеристики центра:
матожидание M или μ
моду Mo
медиану Me

Рассматриваем характеристики
рассеяния – разброса, изменчивости,
вариации

Дисперсия (*Variance*)

$D, \sigma^2, Var \dots$

Указывает,
каких отклонений от центра следует ожидать ↓

Матожидание
квадрата отклонений
от матожидания

$$D(X) = M[(X - M(X))^2]$$

можно записать

Для расчетов:

$$D(X) = M(X)^2 - M^2(X)$$

Дисперсия дискретной СВ:

$$D(X) = \sum_{j=1}^m x_j^2 p_j - M^2(X)$$

Дисперсия
непрерывной
СВ:

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M_X^2$$

$$D_X = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 f(x) dx - M_X^2$$

Был пример про стрелков:

значения дисперсии показали – 1-ый стреляет «кучнее», у него разброс попаданий меньше

Проверьте!

Важный пример

Применение общей формулы в случае биномиального распределения

дает:

$$D = n \cdot p \cdot q$$

Например:
дисперсия количества попаданий
при 4-х независимых выстрелах и вероятности
попасть в каждом 0.75 равна

$$D = 4 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = 0.75$$

Пример непрерывной величины

Известно, что плотность распределения $f(x) = 1/4$ в интервале от 40 до 44.

Тогда:

$$D = \int_{40}^{44} \frac{x^2}{4} dx - 42^2 = \frac{x^3}{12} \Big|_{40}^{44} - 42^2 = \frac{4}{3}$$

Важный пример

Для любого равномерного распределения:

$$D(X) = \frac{(x_{\max} - x_{\min})^2}{12}$$

Проверьте!
Получатся ли 4 /
3 из
предыдущего
примера?

Полезно
иметь
представление
о свойствах
дисперсии

Более естественная мера разброса $\leftrightarrow$

имеет ту же размерность, что и СВ

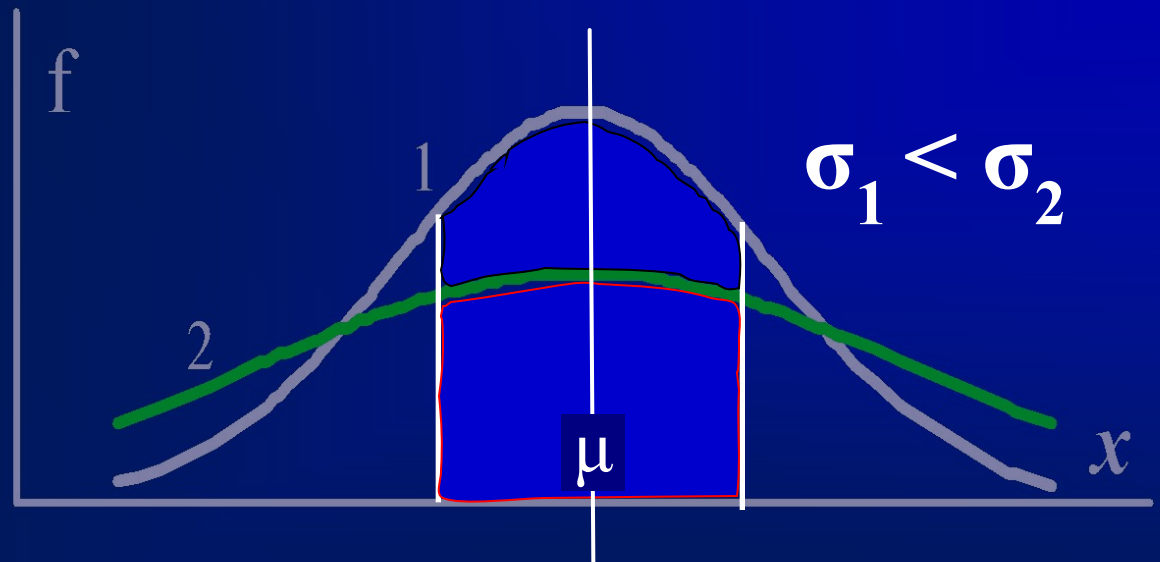
это корень квадратный из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{D}$$

среднеквадратическое
(стандартное)
отклонение

«Физический смысл» σ :
показывает, как далеко в среднем
отдельные значения отклоняются от их центра

«Геометрический смысл» σ и D :
характеризуют степень растянутости,
«размазанности» кривой распределения
вдоль числовой оси



Чем $\leq \sigma$, тем большая часть значений
находится вблизи центра распределения

Отклонения от центра отдельных значений

38
попугае
в!

иногда измеряются в «сигмах»

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

нормализованное (стандартизованное)
отклонение

Еще одна характеристика изменчивости

коэффициент вариации

$$\nu = \frac{\sigma}{\mu} [100\%]$$

Мера относительного рассеяния →
полезна при сравнении СВ,
особенно одних и тех же
параметров но разных объектов

Пример

Одно и то же стандартное отклонение веса в 0.5 кг
было бы большим для группы младенцев,
но очень небольшим для студентов.

Это видно по коэффициенту вариации

$$\nu (\text{млад}) = 0.5/3.5 > 14\% \quad \nu (\text{студ}) = 0.5/65 < 0.8\%$$

Моменты распределения

Так называют параметры распределений — по аналогии с механикой

Математическое ожидание μ — *начальный момент 1-го порядка*

Дисперсия D — *центральный момент 2-го порядка*

С моментами более высоких порядков связаны характеристики формы распределения



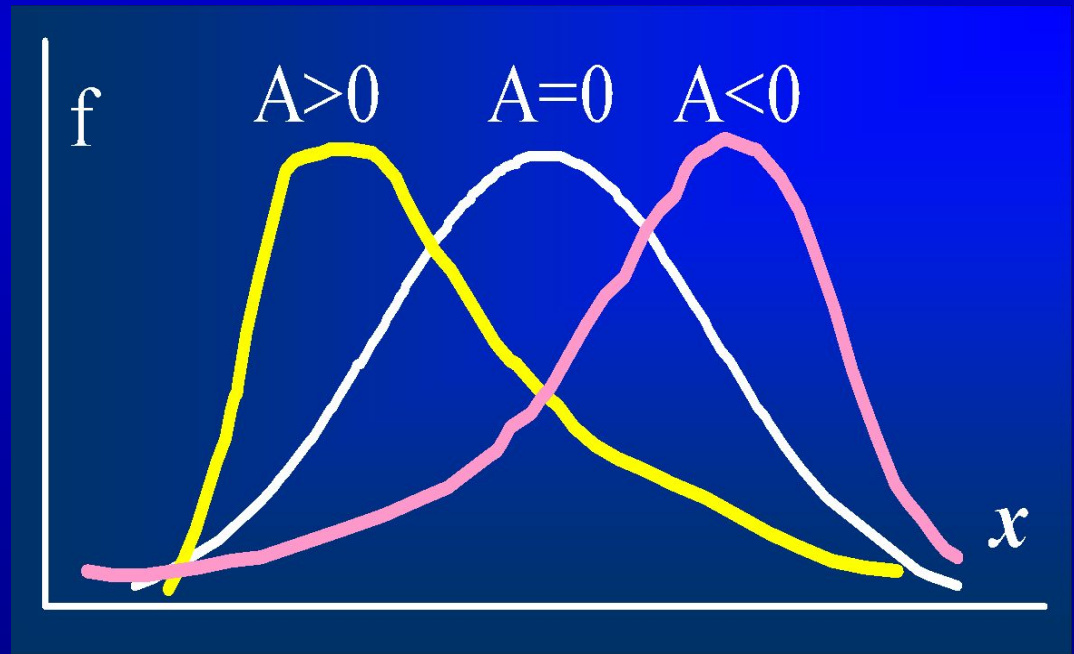
Коэффициент асимметрии

или просто асимметрия (скошенность)

Обозначается A (или Sk)

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

μ_3 — центральный
момент
3-го порядка



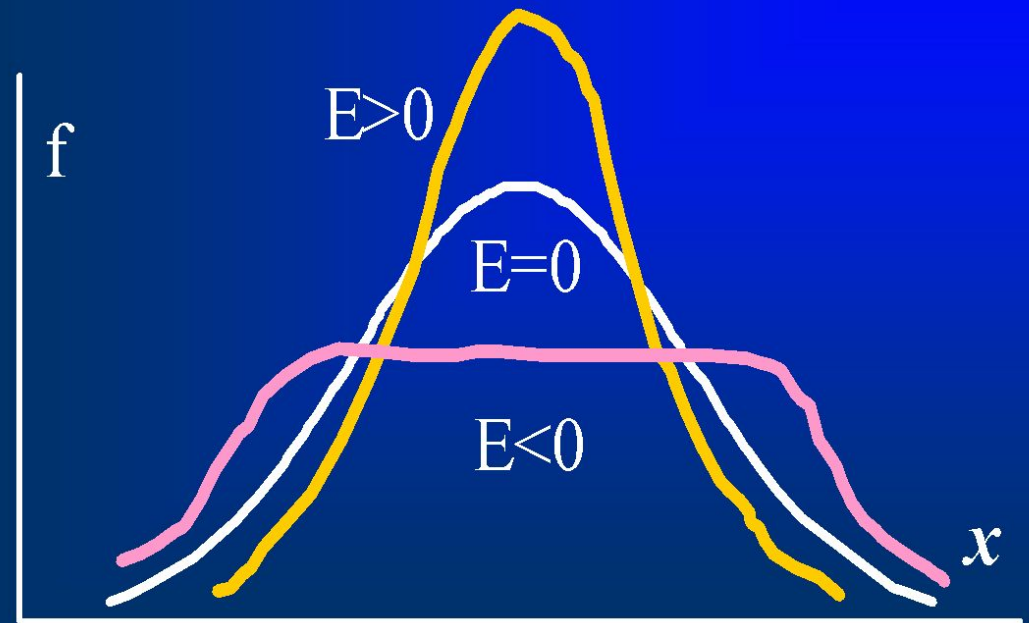
Коэффициент эксцесса

или просто эксцесс. Обозначается E

Что за
«3»?

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

μ_4 – центральный
момент
4-го порядка



A и E
позволяют судить
об отклонении распределения
от «стандарта» – нормального закона
распределения

e
 E_n

$d E_n$