



ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если функция $f(x)$
непрерывна на отрезке $[a, b]$
то определенный интеграл
от этой функции
в пределах от a до b
существует и имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Задача численного интегрирования

Найти определенный интеграл
на отрезке $[a, b]$
если подынтегральная функция
на отрезке задана таблично.

Формулы
приближенного интегрирования
называются
квадратурными формулами.

Метод прямоугольников

основан на непосредственном
определении интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

где $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ - интегральная сумма, соответствующая
некоторому разбиению отрезка $[a, b]$
и некоторому выбору точек

$$\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$$

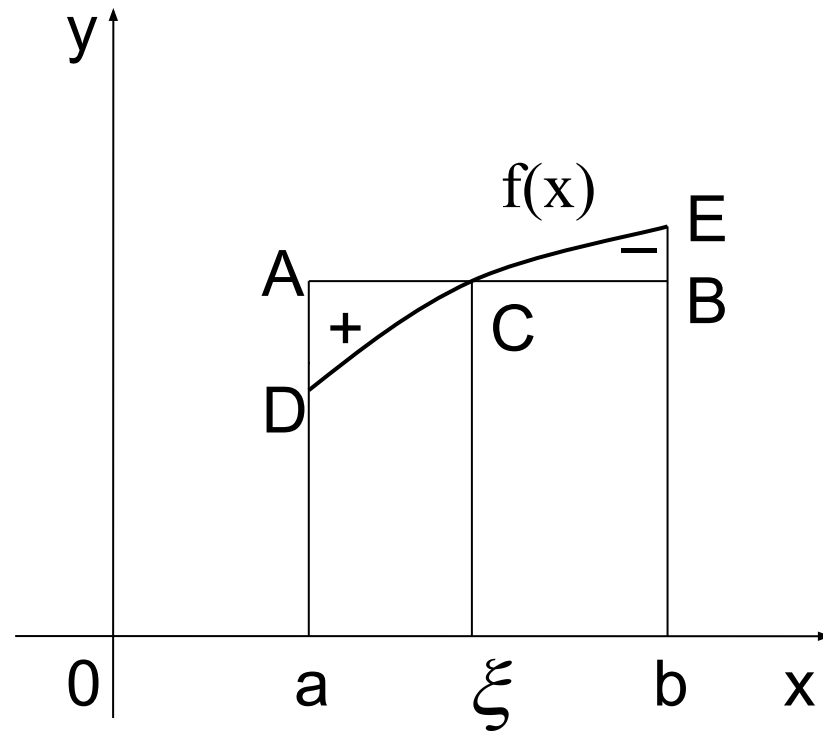
на отрезках разбиения

Вычисление определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

геометрически сводится
к вычислению площади
криволинейной трапеции,
ограниченной функцией $f(x)$,
осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Учитывая,
что высота
Прямоугольника
ABba есть
значение
функции
в точке ξ



$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\xi)$$

Для увеличения точности
численного интегрирования
можно отрезок $[a, b]$
разбить на несколько частей
и для каждой из них вычислить
приближенное значение
площади криволинейной
трапеции, основанием которой
является отрезок

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

а высотой число

$f(\xi_i)$ т.е. значение функции
 ξ_i в $[x_i, x_{i+1}]$

$$\int_a^b f(x) dx \approx f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}$$

Практически удобно делить
отрезок $[a, b]$

на равные части, а точки

ξ_i ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) совмещать с левыми

$$[f(\xi_i) = f(x_i)]$$

или с правыми $[f(\xi_i) = f(x_{i+1})]$

концами отрезков разбиения.

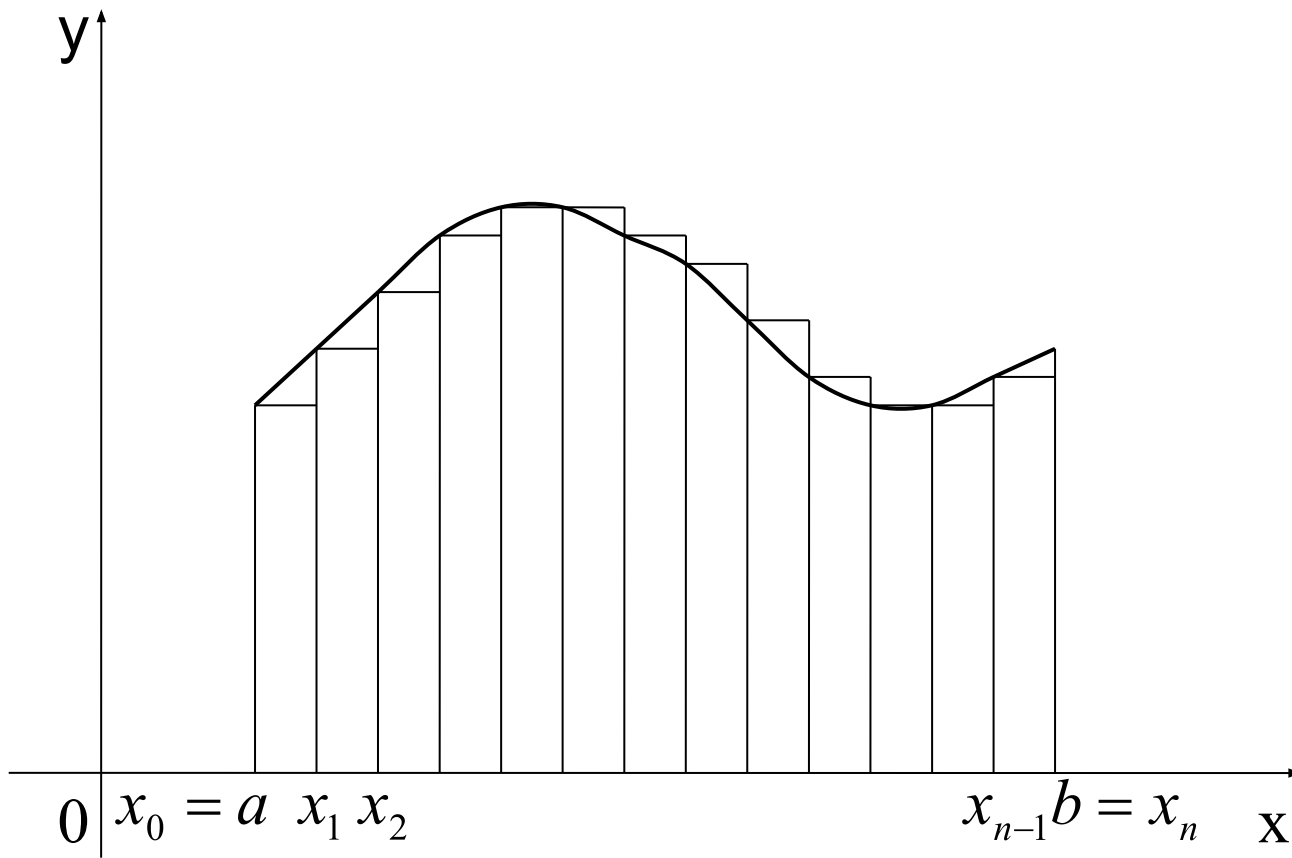
Если точку ξ_i
совместить с левым концом
отрезка Δx_i

то приближенное значение
интеграла может быть
представлено

формулой левых
прямоугольников:

$$I_{\text{л}} = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

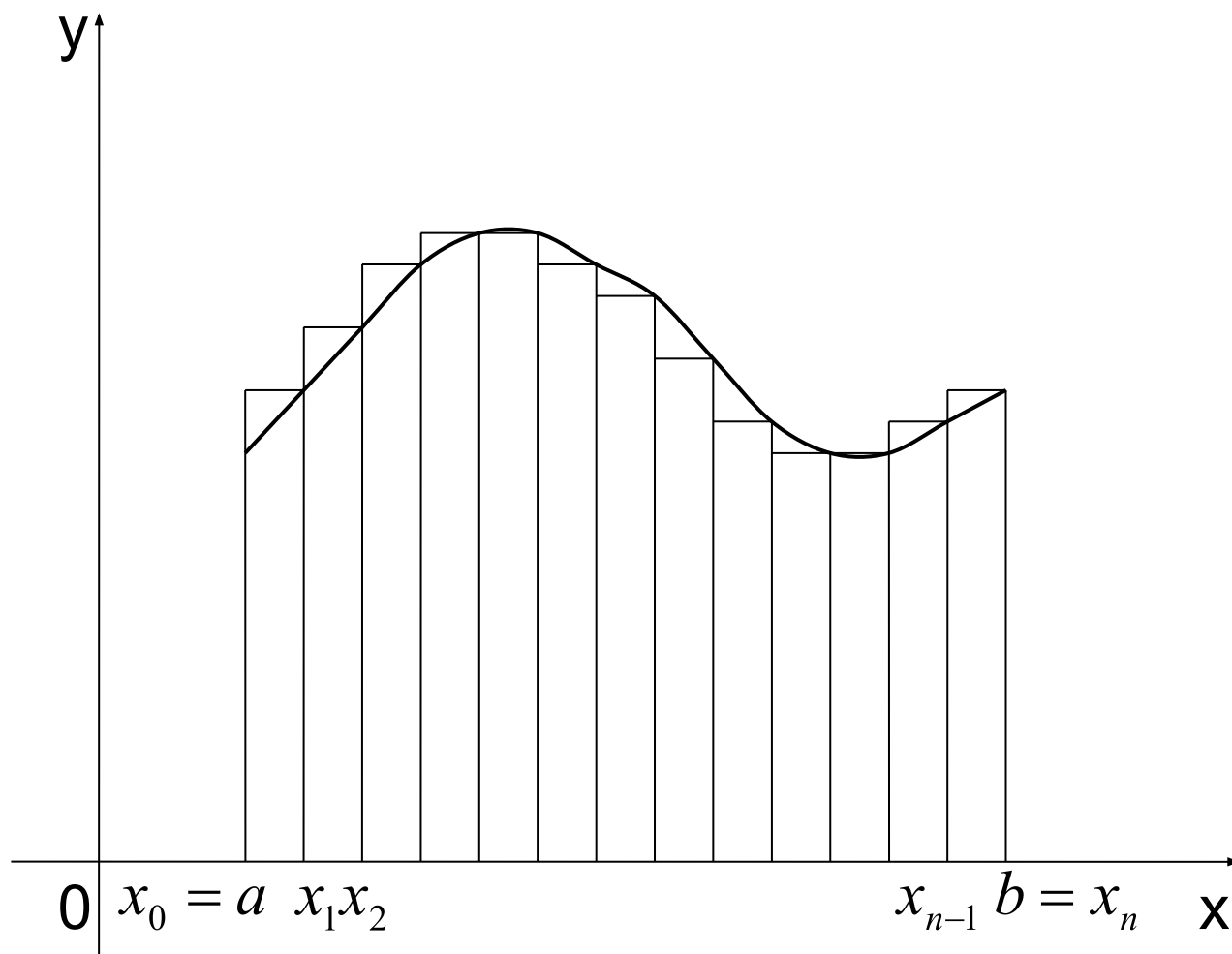
где $h = \frac{b-a}{n}$ – шаг.



Если же в качестве точки ξ_i
выбрать правый конец отрезка Δx_i

то приближенное значение
интеграла вычисляется
по **формуле правых**
прямоугольников:

$$I_{\Pi} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = h \sum_{i=1}^n y_i$$

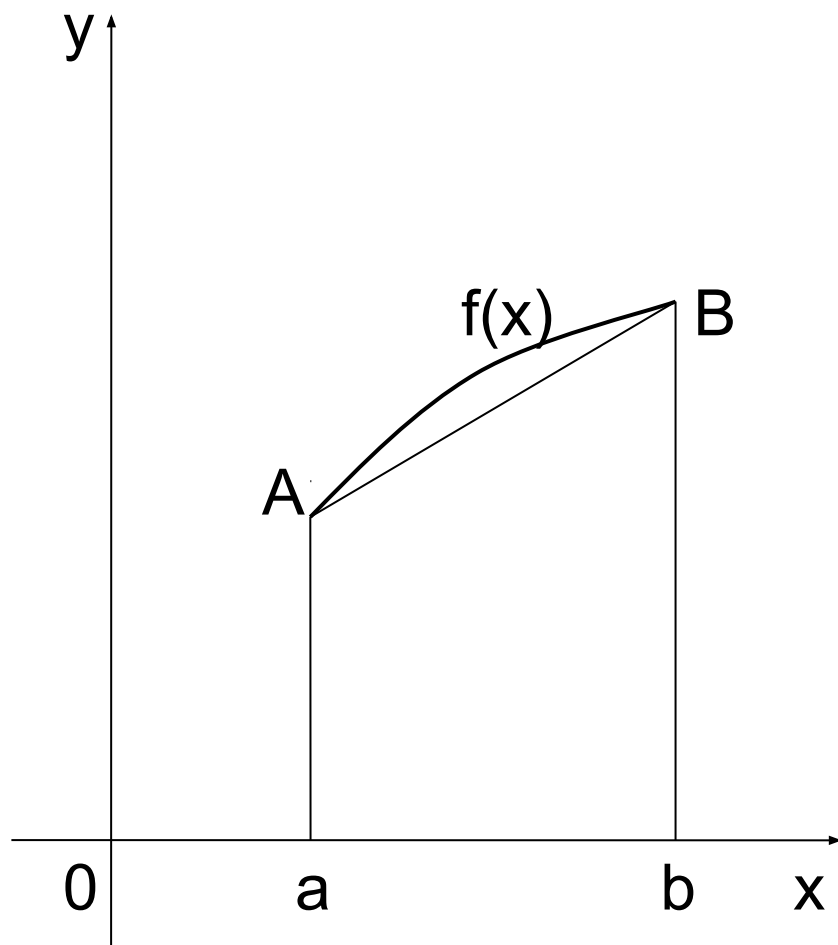


Метод трапеций

Заменим на отрезке $[a, b]$
дугу АВ графика
подынтегральной функции $y = f(x)$
стягивающей ее хордой и
вычислим площадь трапеции АВba.
Примем значение определенного
интеграла численно равным
площади этой трапеции:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Это ^a и есть **формула трапеций**

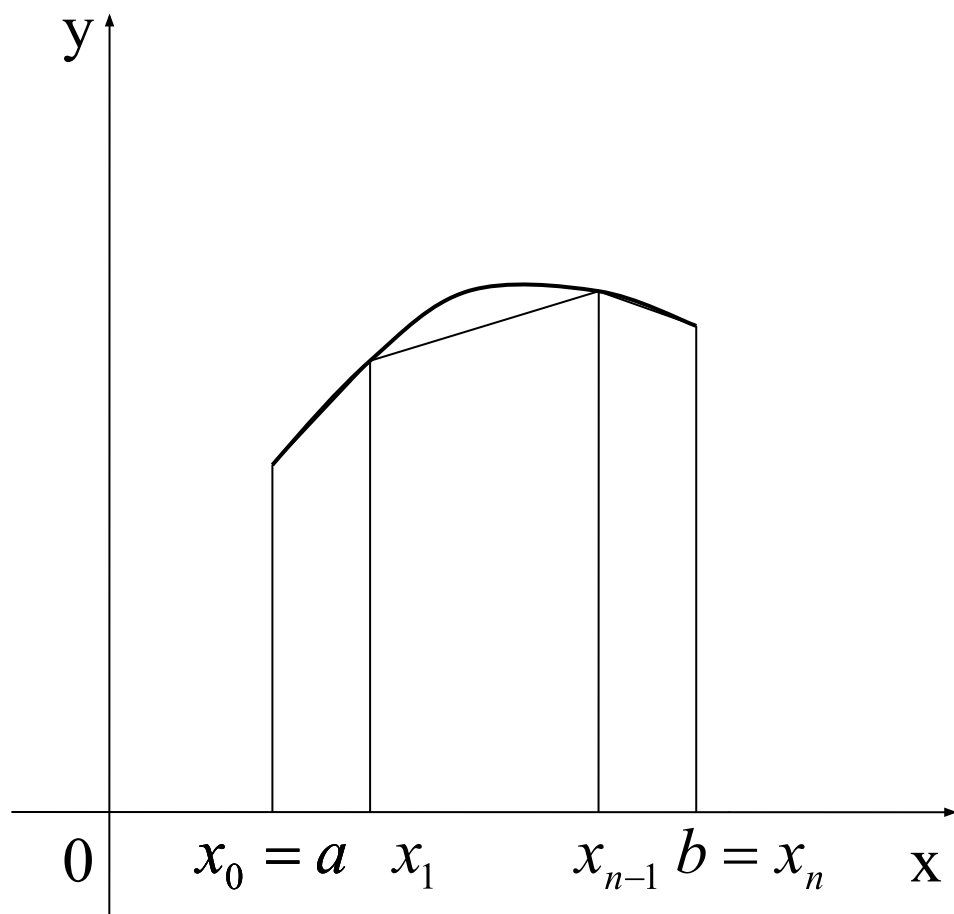


Если отрезок $[a, b]$

разделить на несколько
частей и применить
формулу трапеции
к каждому отрезку Δx_i

Тогда

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x_i$$



Для простоты вычислений
удобно разделить отрезок $[a, b]$
на равные части,
в этом случае длина
каждого из отрезков
разбиения есть

$$\Delta x_i = \frac{b - a}{n}$$

Численное значение
интеграла на отрезке Δx_i
равно

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{b - a}{n} \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

А на всем отрезке $[a, b]$

соответственно

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

Эта формула называется

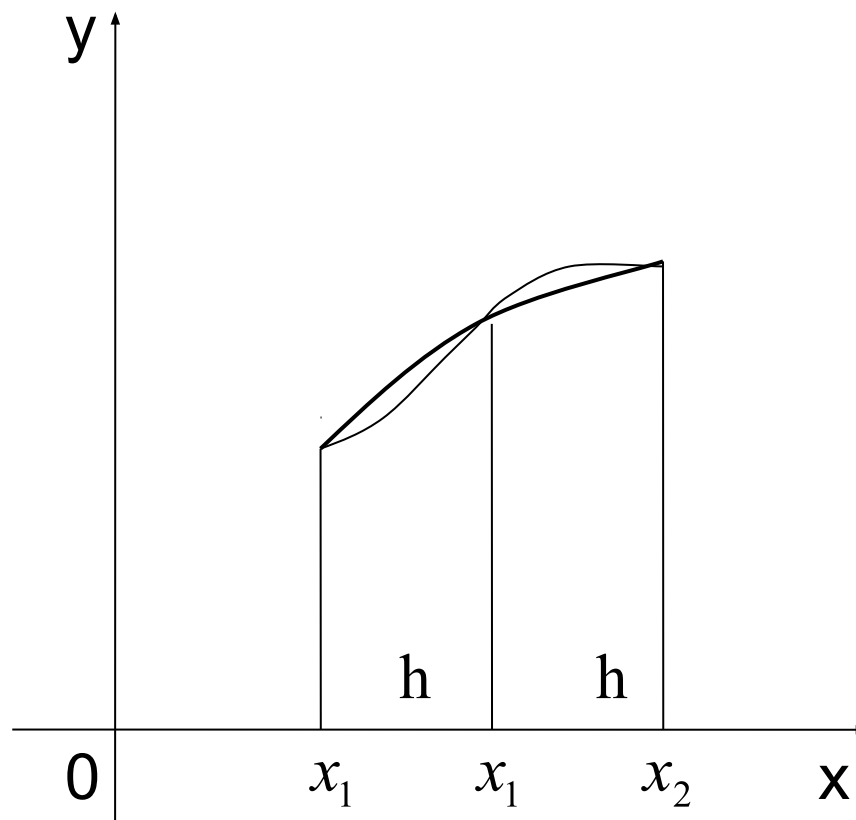
общей формулой
трапеции.

Ее можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$ – шаг.

Метод парабол (метод Симпсона)



функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$

заменяем квадратичной функцией,
принимающей в узлах

$$x_0 = a, \quad x_1, \quad x_2 = b$$

значения

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1) \quad \text{и} \quad y_2 = f(x_2)$$

В качестве интерполяционного
многочлена воспользуемся
многочленом Ньютона

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = 2hy_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot \frac{4h^2}{2} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot \frac{8h^3}{3} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \cdot \frac{4h^3}{2} = \\ &= 2hy_0 + 2h\Delta y_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 y_0 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\end{aligned}$$

Это соотношение
называется **формулой**
Симпсона.



Для увеличения точности
вычислений отрезок $[a, b]$

разбивают на n пар участков

$$[x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}]$$

и заменяя подынтегральную
функцию интерполяционным
многочленом Ньютона
второй степени, получают
приближенное значение
интеграла на каждом участке
длины $2h$:


$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

.....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Тогда численное значение
определенного интеграла
на отрезке $[a, b]$

будет равно сумме интегралов

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2})]$$

Это соотношение называется

общей формулой Симпсона.

Ее можно записать также в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} [(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2})]$$

$$\text{где } h = \frac{b-a}{2n}$$