

Высшее назначение математики ...
состоит в том, чтобы находить скрытый
порядок в хаосе, который нас окружает.

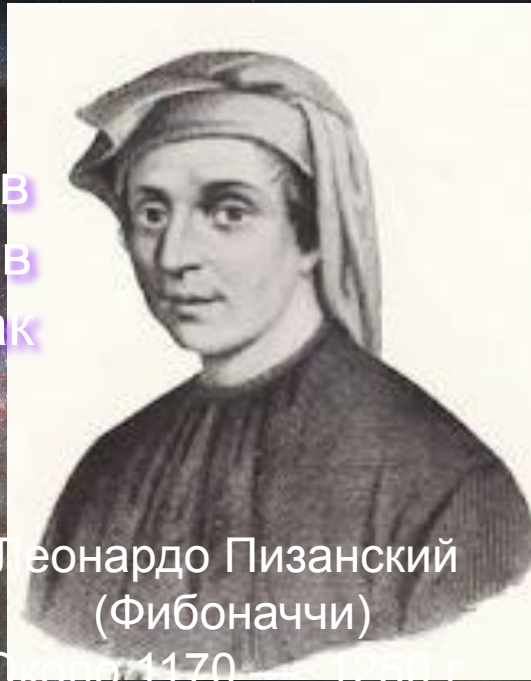
Винер Н.

Числа Фибоначчи

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

ТПУ ИПР Томск
Автор: Константин Шелепов
Преподаватель: Тарбокова Т.В.

Величайшим математиком Европы в средние века был Леонардо из Пизы, в современности он больше известен как Фибоначчи.



Леонардо Пизанский
(Фибоначчи)
Около 1170 — 1250 г.



Его отец был купцом, и Леонардо много путешествовал с ним. В путешествиях он получил те знания, которые помогли ему в дальнейшей работе.

От арабов Леонардо узнал о существовании индийской ныне «арабской» десятичной системы счисления с ее позиционными обозначениями и нулем.

Арабская система счисления

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Римская система счисления

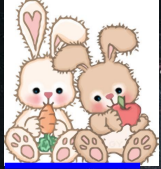
1	I	11	XI	30	XXX	400	CD
2	II	12	XII	40	XL	500	D
3	III	13	XIII	50	L	600	DC
4	IV	14	XIV	60	LX	700	DCC
5	V	15	XV	70	LXX	800	DCCC
6	VI	16	XVI	80	LXXX	900	CM
7	VII	17	XVII	90	XC	1000	M
8	VIII	18	XVIII	100	C	2000	MM
9	IX	19	XIX	200	CC	3000	MMM
10	X	20	XX	300	CCC	4000	MMMM

В своем известном труде «Книга об абаке» Фибоначчи показывает превосходство десятичной системы над римской.



Памятник Леонардо

Задача про кроликов



- пара, не дающая потомство



- пара, дающая потомство

Эдуард Люка



1842 – 1891 г

Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения.

1-й месяц **1**

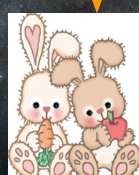
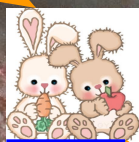
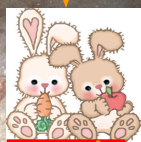
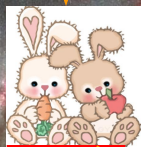
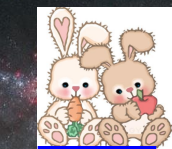
2-й месяц **1**

3-й месяц **2**

4-й месяц **3**

5-й месяц **5**

6-й месяц **8**



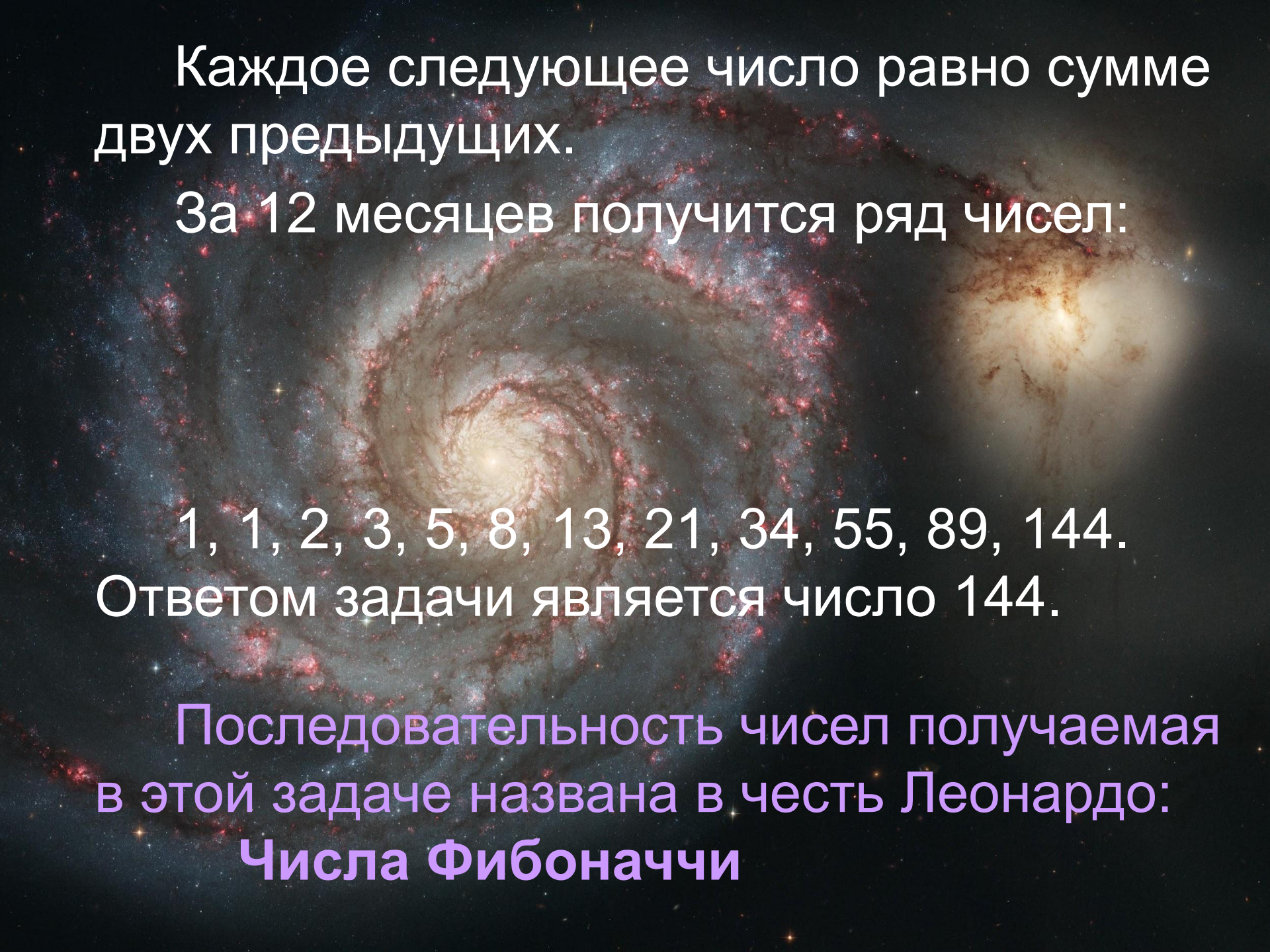
Можно заметить закономерность, которая выполняется начиная с третьего месяца:

3-й месяц — $1 + 1 = 2$ пары;

4-й месяц — $1 + 2 = 3$ пары;

5-й месяц — $2 + 3 = 5$ пар;

6-й месяц — $3 + 5 = 8$ пар и т.д.



Каждое следующее число равно сумме двух предыдущих.

За 12 месяцев получится ряд чисел:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Ответом задачи является число 144.

Последовательность чисел получаемая в этой задаче названа в честь Леонардо:

Числа Фибоначчи

Таблица первых 40 чисел Фибоначчи

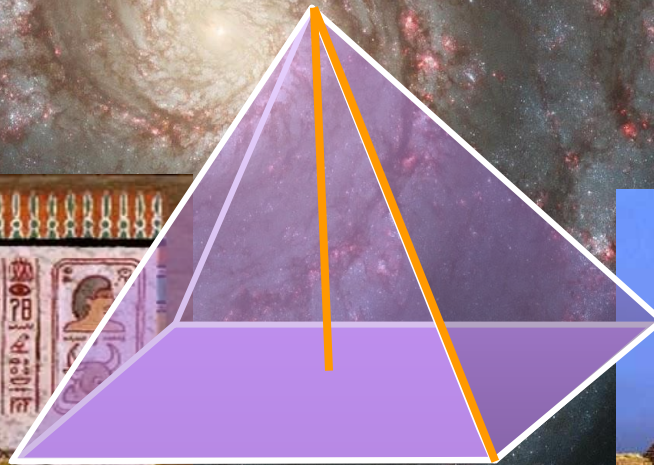
номер	число	номер	число	номер	число	номер	число
1	1	11	89	21	10 946	31	1 346 269
2	1	12	144	22	17 711	2	2 178 309
3	2	13	233	23	28 657	33	3 524 578
4	3	14	377	24	46 368	34	5 702 887
5	5	15	610	25	75 025	35	9 227 465
6	8	16	987	26	121 393	36	14 930 352
7	13	17	1 597	27	196 419	37	24 157 817
8	21	18	2 584	28	317 811	38	39 088 169
9	34	19	4 181	29	514 229	39	63 245 986
10	55	20	6 785	30	832 040	40	102 334 155

Числа Фибоначчи в древнем Египте

Пирамида построена так, чтобы площадь каждой из ее граней была равна квадрату ее высоты.

$$238,7 : 147,6 = 1,618$$

Наблюдения показывают, что конструкция пирамиды основана на пропорции $\Phi=1,618$.



Свойства чисел Фибоначчи

Последовательность чисел обладает многими свойствами.

Рассмотрим некоторые из них:

- Найдем отношение числа ряда Фибоначчи к последующему:

$$1:1=1$$

$$1:2=0,5$$

$$2:3=0,666\dots$$

$$3:5=0,6$$

$$5:8=0,625$$

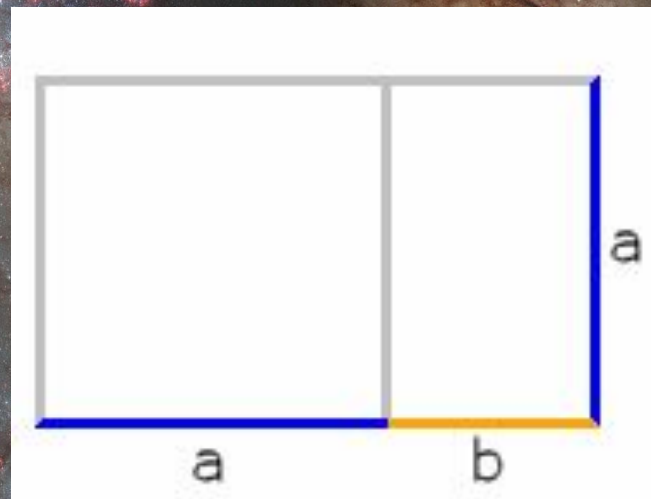
$$8:13=0,615\dots$$

$$13:21=0,618$$

Отношение каждого числа к последующему более и более стремится к числу $\phi = 0,618$ по увеличении порядкового номера.

Если найти отношения числа к предыдущему, то отношение каждого числа к предыдущему стремится к $\Phi = 1,618$ (обратному к 0,618).

Золотое сечение и числа Фибоначчи

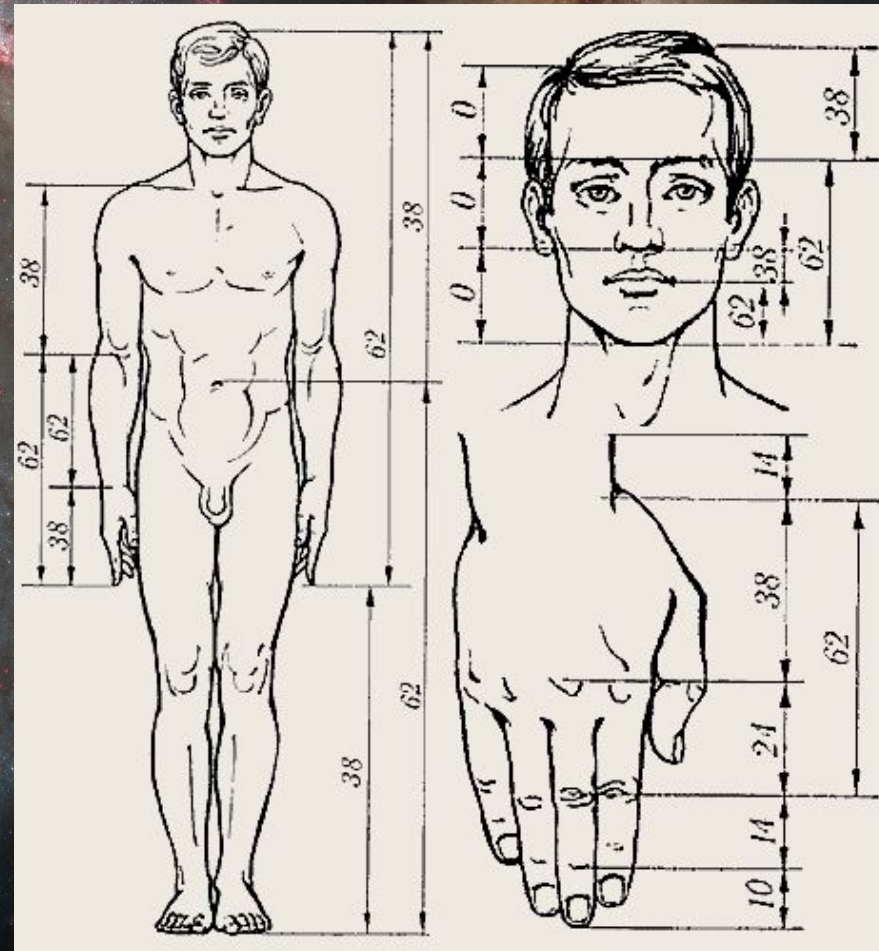


- Золотым прямоугольником называют такой прямоугольник, у которого длина примерно в 1,6 раза больше ширины. Другими словами стороны прямоугольника образуют так называемое золотое сечение. Слово «сечение» обозначает «деление на части». Золотое сечение отрезка – деление непрерывной величины на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине.

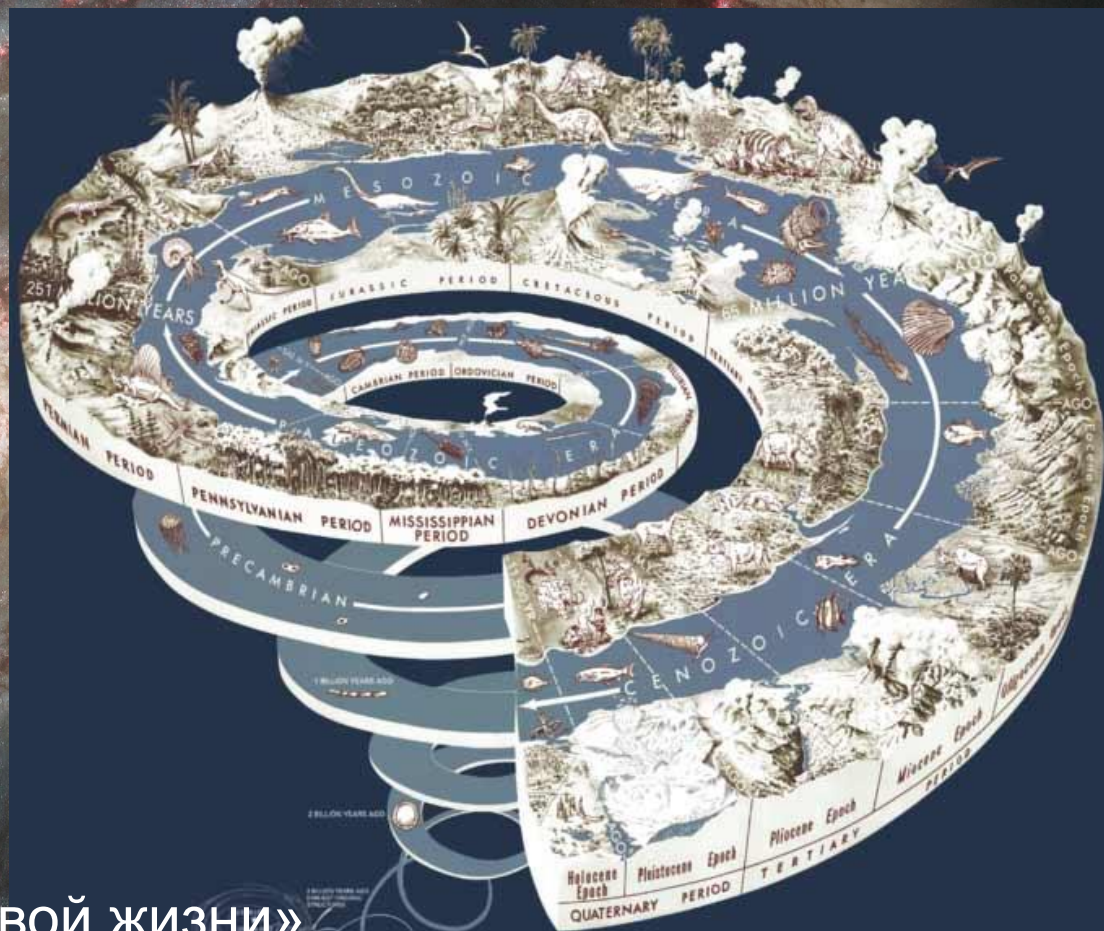
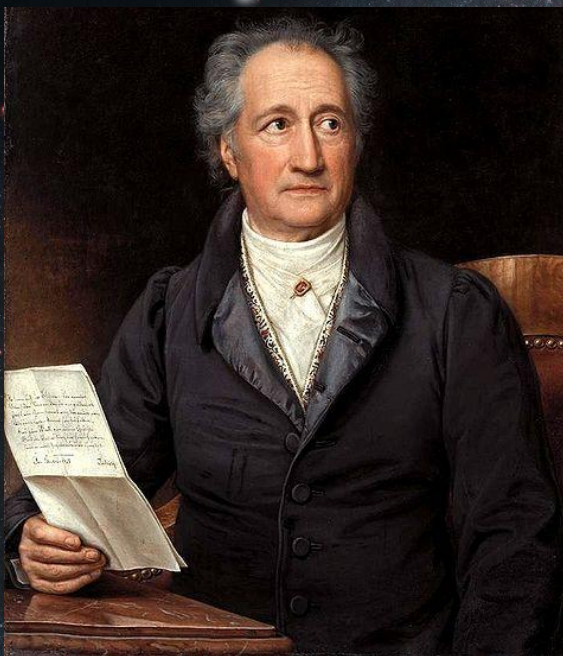
Золотое сечение и пропорции человеческого тела

Интересные закономерности наблюдаются, если связывать золотое сечение, числа Фибоначчи и строение человеческого тела.

Пропорции мужского тела колеблются в пределах среднего отношения $13:8 = 1,625$ и несколько ближе подходят к золотому сечению, чем пропорции женского тела, в отношении которого среднее значение пропорции выражается в соотношении $8:5 = 1,6$.



Спираль и числа Фибоначчи



Гёте называл спираль «кривой жизни». Удивительно, что последовательность чисел Фибоначчи напрямую связана со спиральностью в окружающем мире.

Спираль.

233

144

144

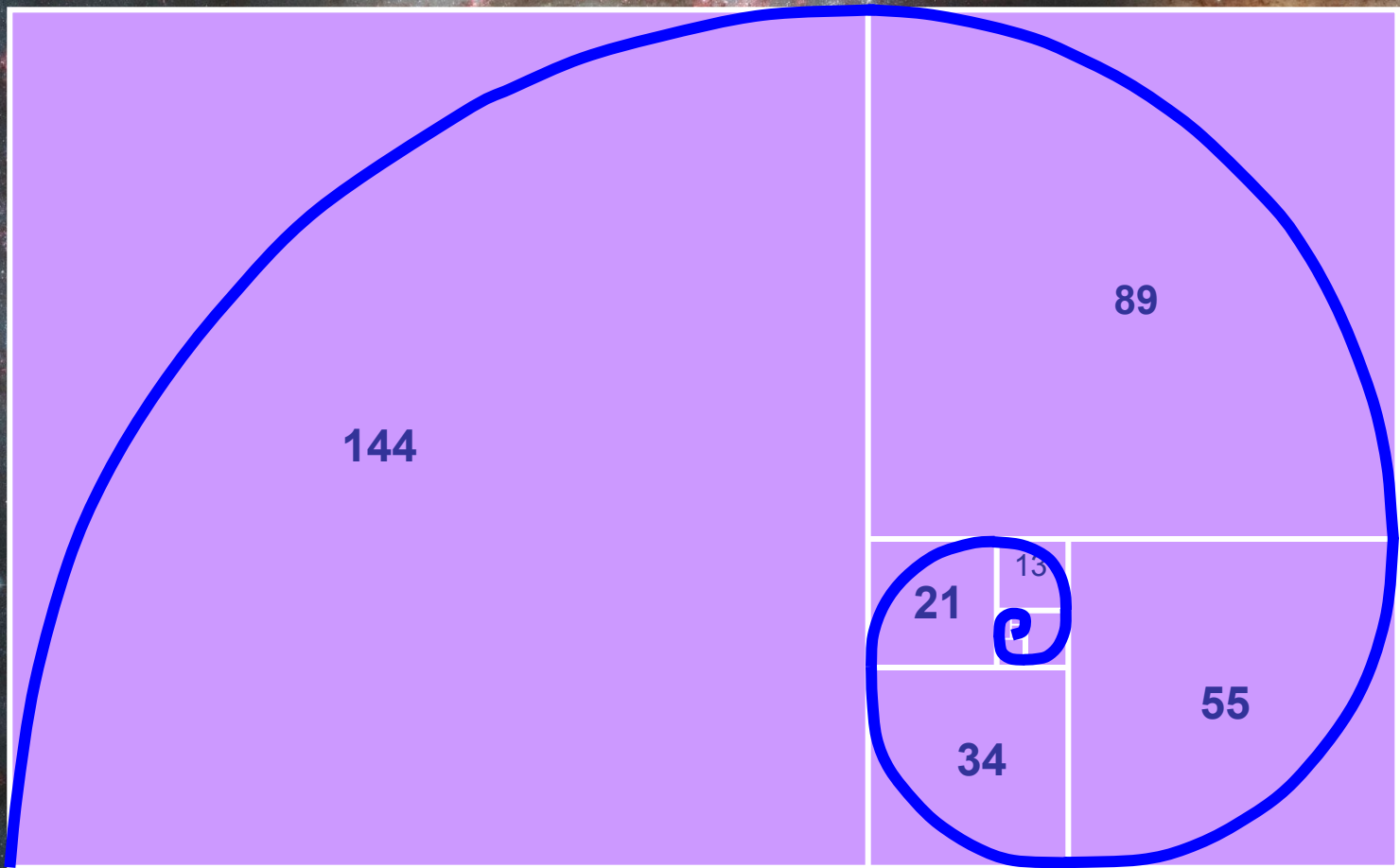
89

21

13

55

34





На многих шишках «чешуйки»
расположены в трех спиралях,
одного навивающихся на
другую шишку.



Хорошо видны эти же спирали
и на ананасах: обычно их
бывает 8 и 13



- Рассмотреть спираль так же можно в паутине или в том, как свернулась сороконожка .

Если посмотреть на многие кактусы сверху, то можно и здесь обнаружить ту же спираль, усики огурца или свернувшийся лист также демонстрируют спиралеобразное строение.



- У многих сложноцветных (розы, маргаритки, ромашки) заметно, спиральное расположение отдельных цветков. Молодые побеги папоротника, закручены в спираль. Хорошо виден винтообразный рост веток дерева.



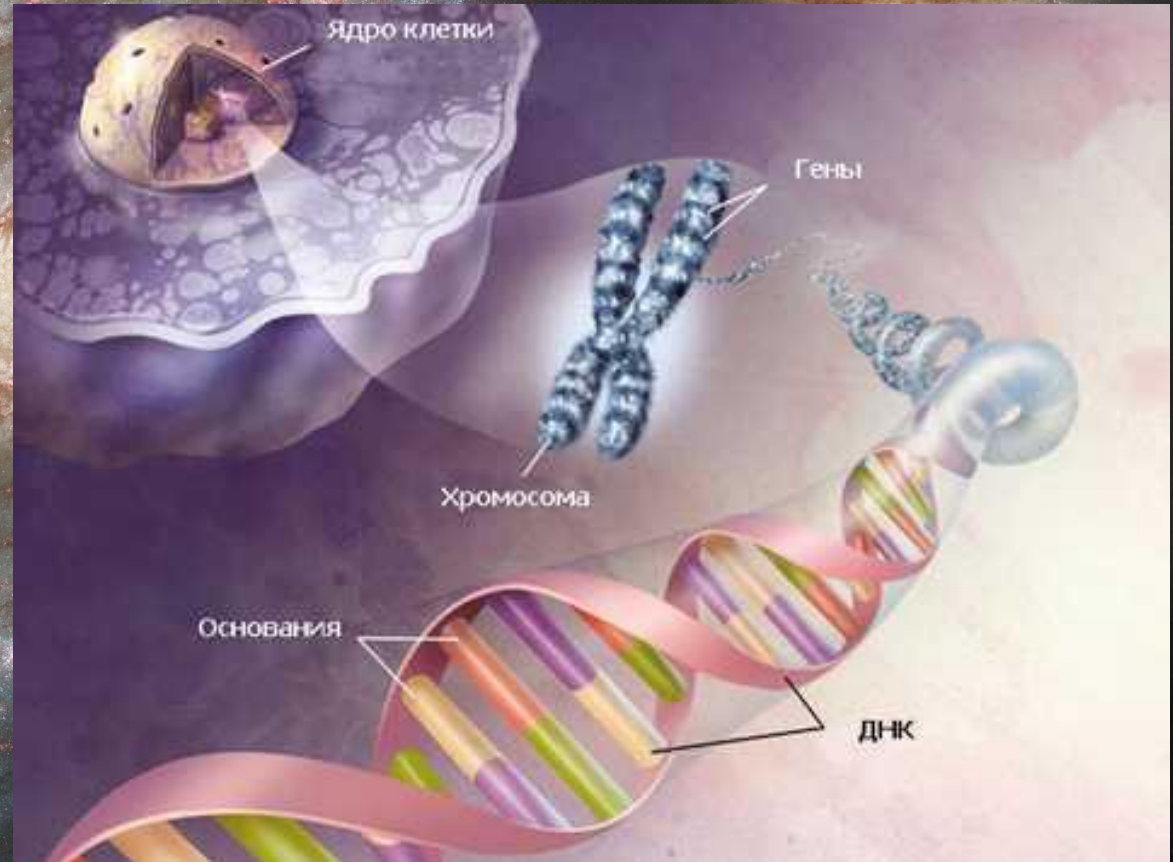
Можно увидеть спираль и в разных явлениях природы, например таких как: смерч, ураган, облака, морские волны. Наша галактика – это спираль.

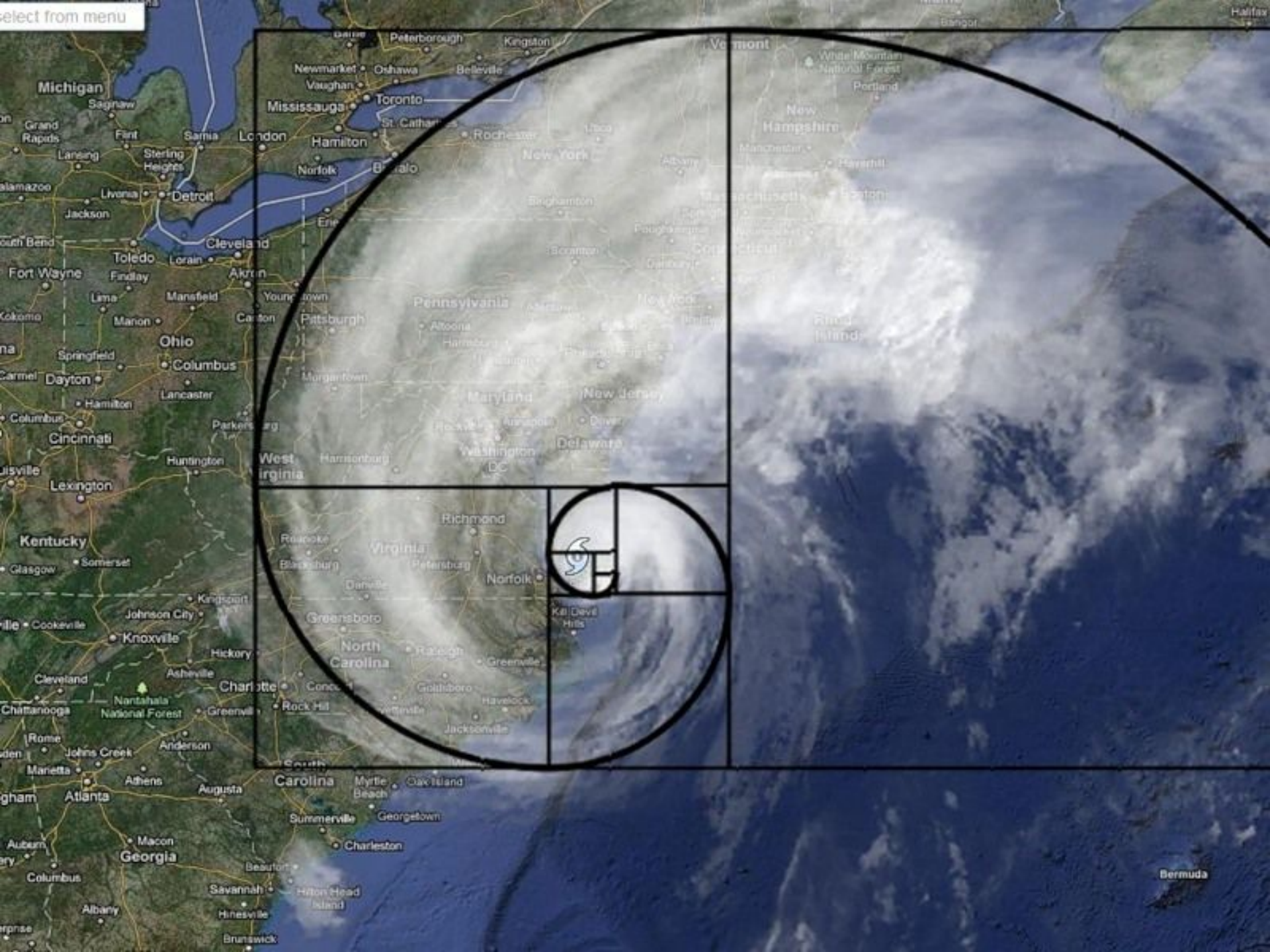


- Оказывается спираль Фибоначчи есть и на отпечатке пальца.



Даже ДНК человека это две свитые спирали.
Винты и спирали действительно на каждом шагу
окружают нас.





Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля	Номер строки	Возведение в степень двучлена
1	0	$(a + b)^0 = 1$
1 1	1	$(a + b)^1 = a + b$
1 2 1	2	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	3	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$
1 4 6 4 1	4	$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	5	$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
1 6 15 20 15 6 1	6	и т. д.

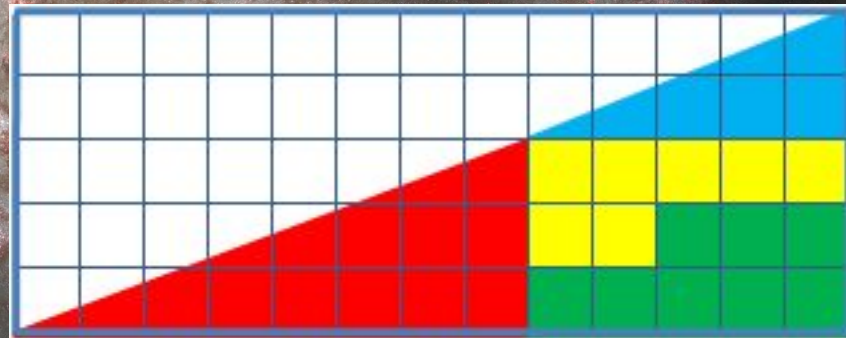
Треугольник Паскаля

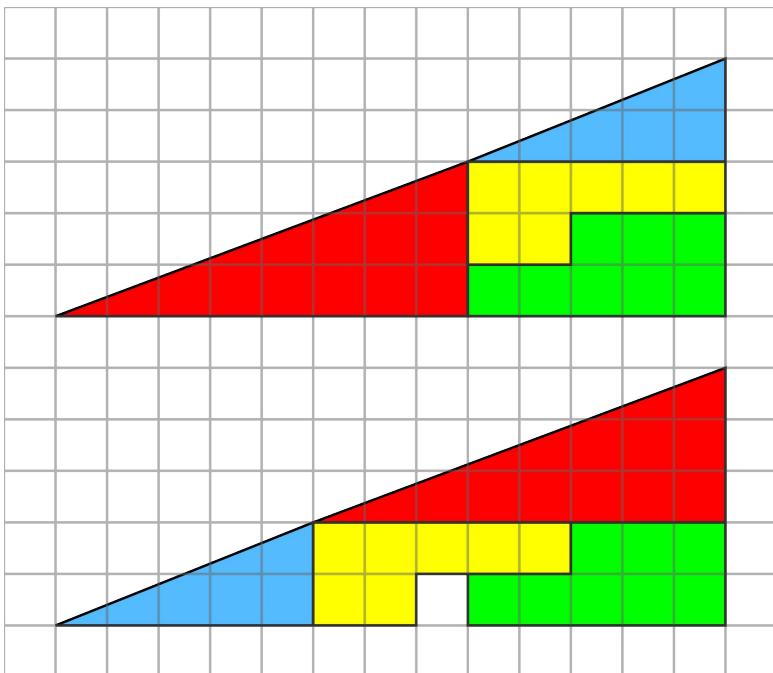
Pascal's Triangle diagram showing rows 0 through 7. The numbers are arranged in a triangular pattern, with each number being the sum of the two numbers directly above it. The numbers are colored blue, and the row indices are colored red. Green numbers above the triangle indicate the sum of the two numbers above each cell. Yellow arrows show the addition of two numbers from the previous row to form a number in the current row.

0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	

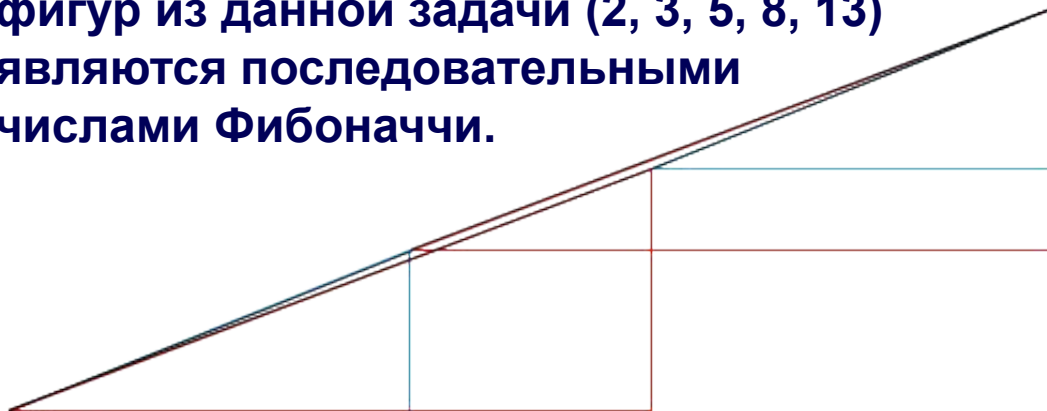
.....

Парадокс с площадью





Можно заметить, что длины сторон фигур из данной задачи (2, 3, 5, 8, 13) являются последовательными числами Фибоначчи.



Площади покрашенных фигур, разумеется, равны между собой (32 клетки), однако, то, что визуально наблюдается как треугольники 13×5 , на самом деле таковым не является, и имеет разные площади ($S_{13 \times 5} = 32,5$ клетки). То есть ошибка, замаскированная в условии задачи, состоит в том, что начальная фигура поименована треугольником (на самом деле это — вогнутый 4-угольник). Это отчётливо заметно на рисунках 1 и 2 — «гипотенузы» верхней и нижней фигур проходят через разные точки: (8,3) вверху и (5,2) — внизу. Секрет в свойствах синего и красного треугольников. Это легко проверить вычислениями.

Свойство чисел Фибоначчи, на котором основан парадокс с площадью

1 1 2 3 5 8 13 21

$$3^2 = 2 \cdot 5 - 1$$

$$5^2 = 3 \cdot 8 + 1$$

$$8^2 = 5 \cdot 13 - 1$$

$$13^2 = 8 \cdot 21 + 1$$

Некоторые свойства чисел Фибоначчи

I свойство: Сумма n первых ряда
Фибоначчи равна $n+2$ члену без единицы.

- $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$

- **II свойство:** Сумма чисел Фибоначчи с
нечетными номерами равна следующему
числу с четным номером

- $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$

Некоторые свойства чисел Фибоначчи

- **III свойство** Сумма чисел Фибоначчи с чётными номерами равна следующему четному числу без единицы:
$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$$
- **IV свойство:** Сумма квадратов первых n чисел Фибоначчи равна произведению n -го и следующего за ним члена.
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1}$$

Спасибо за внимание

