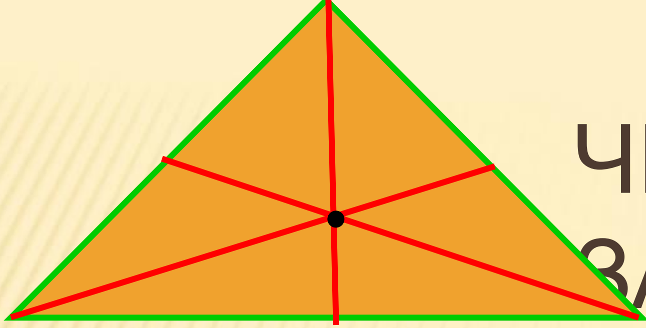
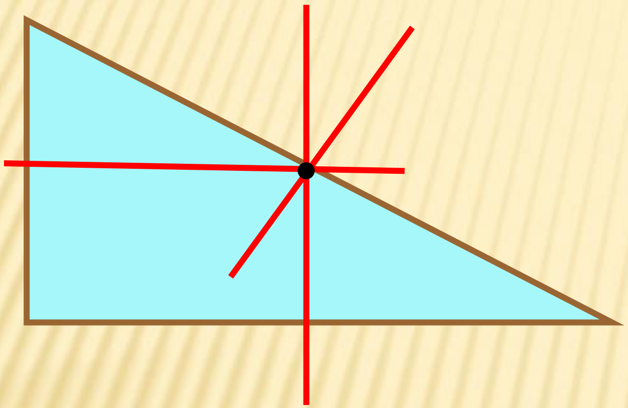
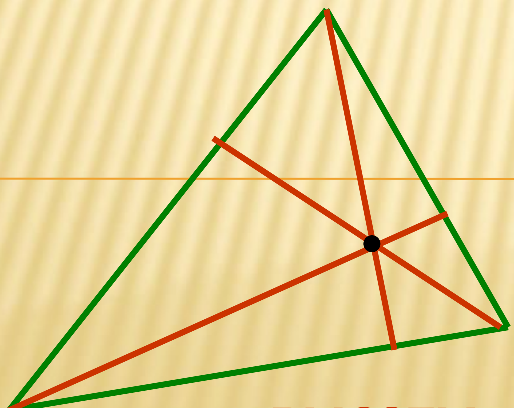
ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА



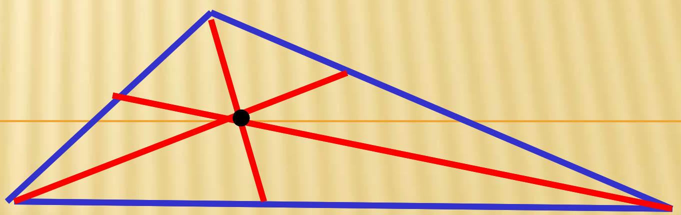
медианы



серединные перпендикуляры



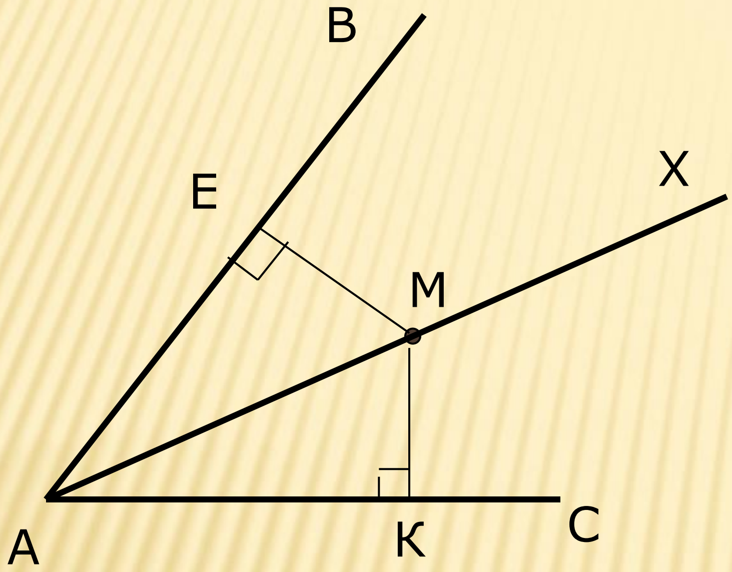
высоты



биссектрисы

СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ НЕРАЗВЁРНУТОГО УГЛА

Теорема1. **Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон.**



Дано: $\angle$ BAC, AX – биссектриса,

M Є AX, ME $\perp$ AB, MK $\perp$ AC

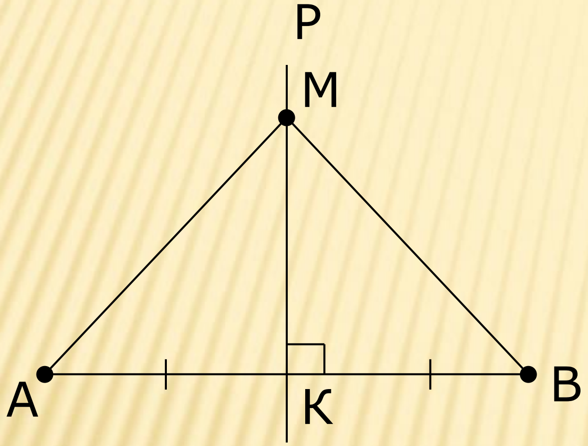
Доказать: ME = MK

Теорема 2 (обратная).**Точка, лежащая внутри неразвёрнутого угла и равноудалённая от его сторон, лежит на биссектрисе этого угла.**

Обобщённая теорема: биссектриса неразвёрнутого угла – множество точек плоскости, равноудалённых от сторон этого угла.

СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ОТРЕЗКУ

Теорема 1. **Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов.**



Дано: AB – отрезок,
PK – серединный перпендикуляр,
M є PK

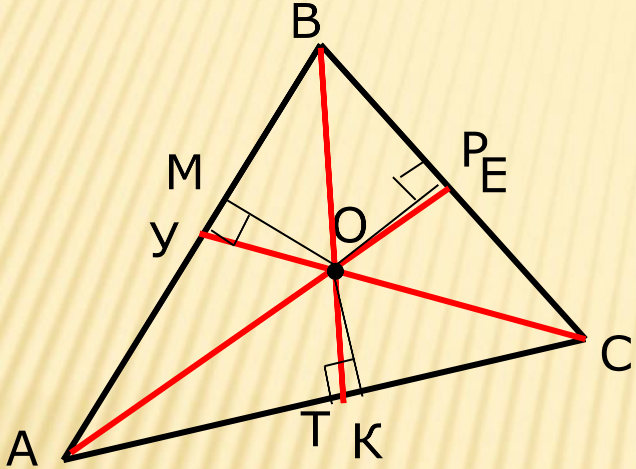
Доказать: MA = MB

Теорема 2. **Точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.**

Обобщённая теорема: серединный перпендикуляр к отрезку – множество точек плоскости, равноудалённых от его концов.

ПЕРВАЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНАЯ ТОЧКА ТРЕУГОЛЬНИКА

<u>Теорема. </u>**Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**



Дано: $\triangle$ ABC, AE, BT – биссектрисы,
O - точка их пересечения

Доказать: CУ – биссектриса $\triangle$ ABC, O є CУ

Доказательство:

AE – биссектриса и OM $\perp$ AB, OK $\perp$ AC,
значит, OM = OK

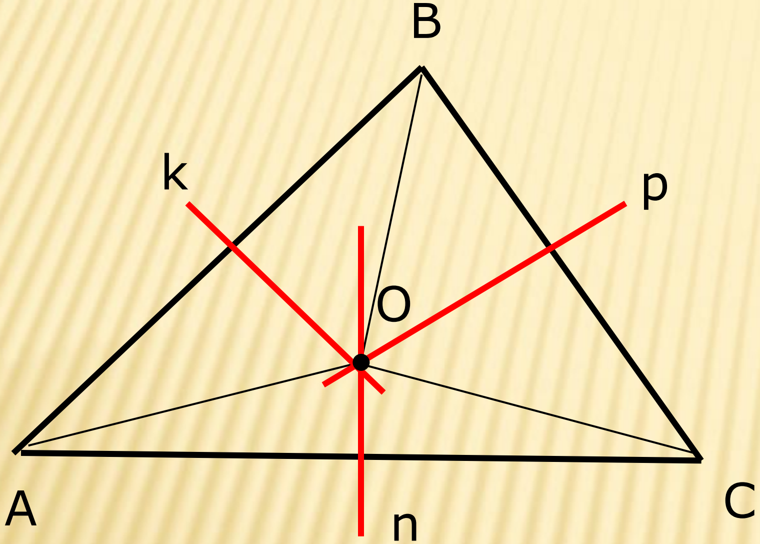
BT – биссектриса, и OM $\perp$ AB, OP $\perp$ BC, значит, OM = OP

Значит, OM = OK = OP и OP $\perp$ BC, OK $\perp$ AC, следовательно,
O лежит на биссектрисе угла ACB, т. е. CУ – биссектриса $\triangle$ ABC.

Значит, O – точка пересечения трёх биссектрис треугольника.

ВТОРАЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНАЯ ТОЧКА ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. **Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.**



Дано: △ ABC, k,n – серединные перпендикуляры к сторонам треугольника,
O – точка их пересечения

Доказать: p – серединный перпендикуляр к BC, O є p

Доказательство:

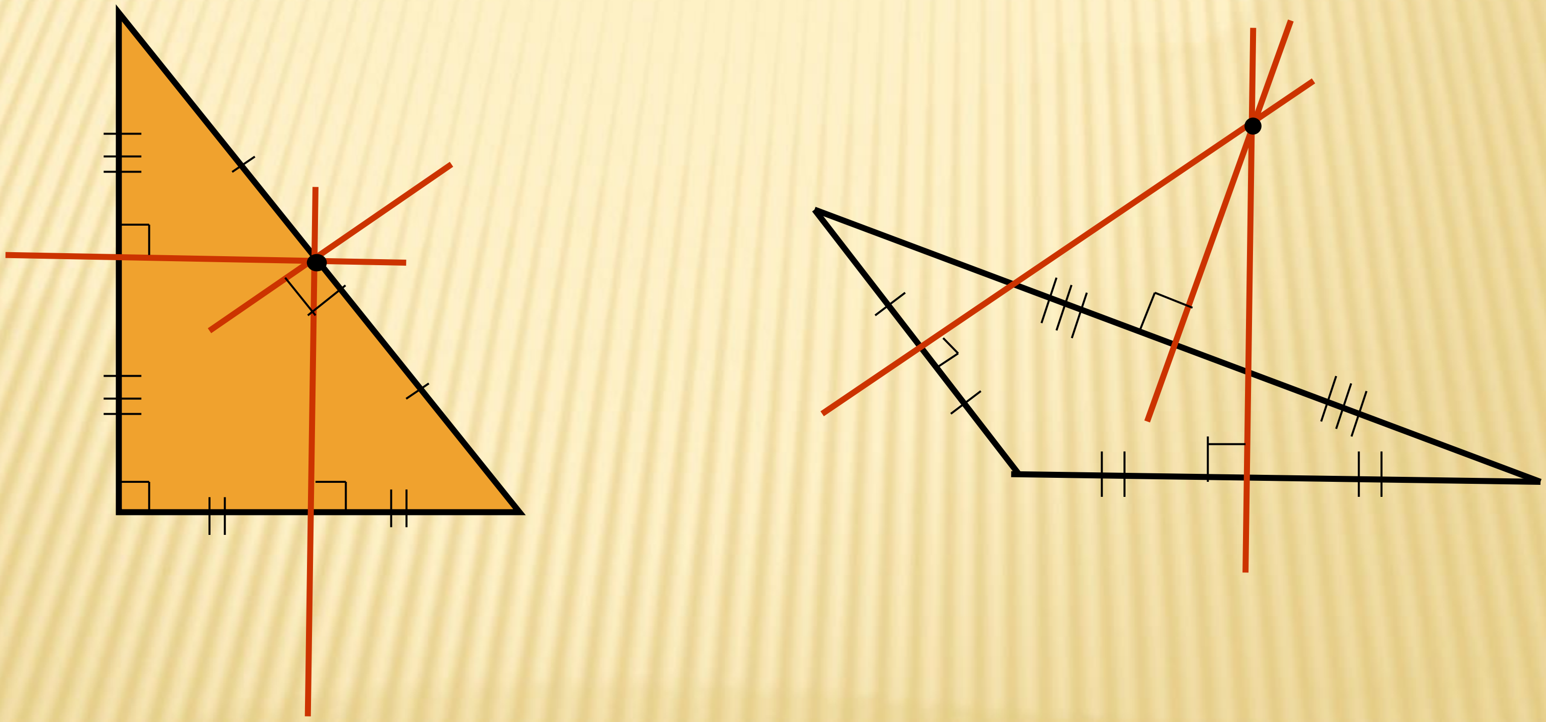
n – серединный перпендикуляр к AC и O є n, значит, OA = OC.

k – серединный перпендикуляр к AB и O є k, значит, OA = OB.
Следовательно, OA = OB =OC, значит, O лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC, т. е. на p.

Значит, O – точка пересечения серединных перпендикуляров k, n, p.

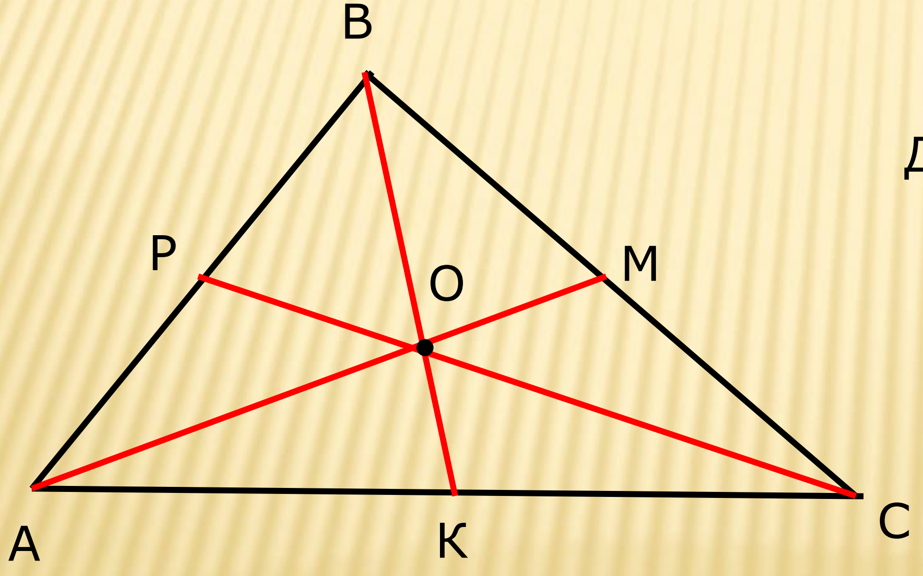
Вторая замечательная точка треугольника (продолжение)

Ещё возможное расположение:



ТРЕТЬЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНАЯ ТОЧКА ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую в отношении 2: 1, считая от вершины.**
(центр тяжести треугольника – центроид)



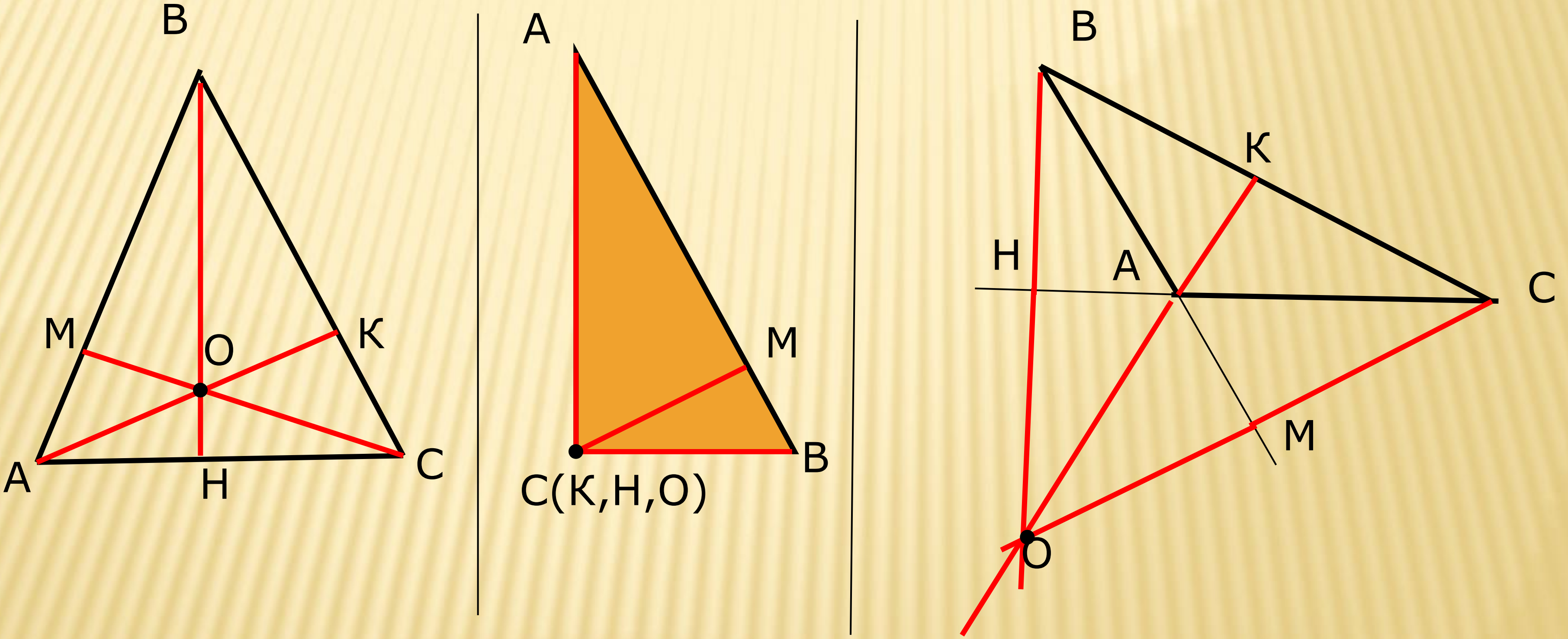
Дано: △ ABC, AM,BK,CP - медианы

Доказать: AM ∩ BK∩ CP = O

Доказательство проведено ранее: задача 1 п. 62.

ЧЕТВЁРТАЯ ЗАМЕЧАТЕЛЬНАЯ ТОЧКА ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. **Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке(ортоцентр).**



Дано: △ABC, AK, BH, CM - высоты

Доказать: O – точка пересечения высот или их продолжений.

Доказательство:

Через вершины В, А, С треугольника АВС

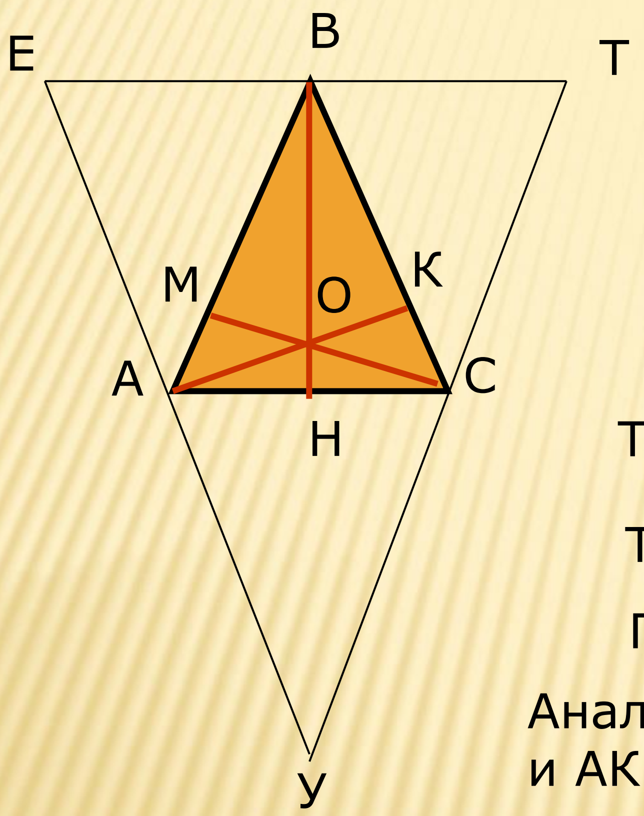
проведём ЕТ || АС, ЕУ || ВС, ТУ || АВ.

Получим:

АСВЕ – параллелограмм, значит, АС = ВЕ

АСТВ – параллелограмм, значит, АС = ВТ

Следовательно, ВЕ = ВТ, т. е. В – середина ЕТ.



Т.к. ВН – высота △ АВС по условию, то ВН ⊥ АС

Т. к. ЕТ || АС по построению, значит, ВН ⊥ ЕТ

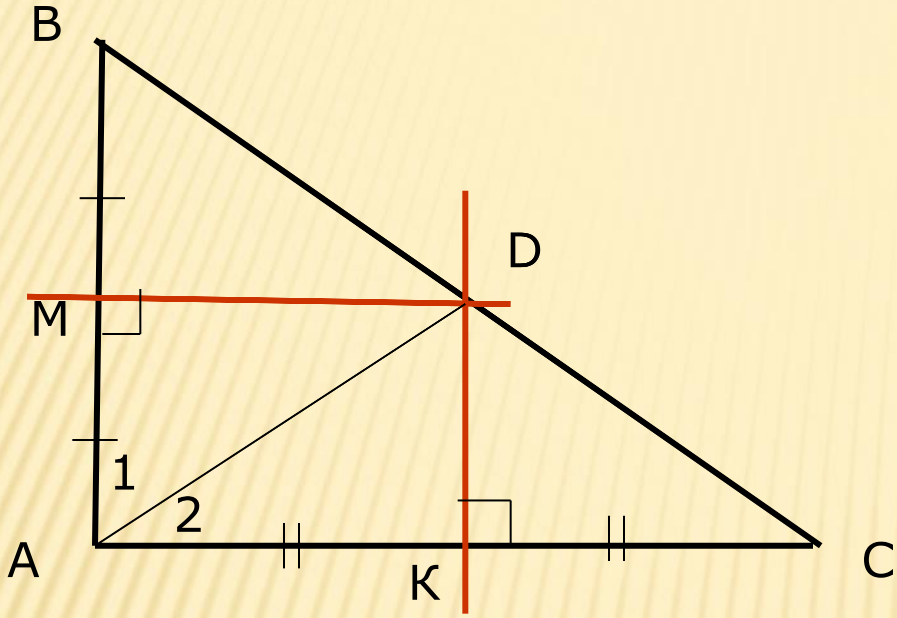
Получим: ВН – серединный перпендикуляр к ЕТ.

Аналогично, СМ – серединный перпендикуляр к ТУ и АК - серединный перпендикуляр к УЕ.

Т. е. ВН, СМ, АК – серединные перпендикуляры к сторонам △ ЕТУ,

которые по ранее доказанному пересекаются в одной точке, значит, высоты △ АВС пересекаются в одной точке.

Задача № 680.



Дано: $\triangle$ ABC, AM = BM, MD $\perp$ AB, AK = KC, DK $\perp$ AC, D є BC.

Доказать: D - середина BC, $\angle$ A = $\angle$ B + $\angle$ C.

Доказательство:

а)

AM = BM, MD $\perp$ AB, D є BC по условию, значит, BD = AD

AK = KC, DK $\perp$ AC, D є BC по условию, значит, AD = DC

BD = DC,

следовательно, D – середина BC.

б) По доказанному BD = AD и AD = DC, значит, треугольники ABD и ACD – равнобедренные, поэтому $\angle$1 = $\angle$ B, $\angle$2 = $\angle$C.

$\angle$BAC = $\angle$1 + $\angle$2 = $\angle$ B + $\angle$C, что и т. д.

Домашнее задание:
§ 70 - 73.
Решить № 676(а);678(а);
679(а); 681.