

Лекция № 12

Быстрое преобразование Фурье

Нахождение спектральных составляющих дискретного комплексного сигнала непосредственно по формуле ДПФ требует N^2 комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений. Так как количество вычислений, а следовательно, и время вычислений приблизительно пропорциональны N^2 , то при больших N количество арифметических операций весьма велико. Поэтому нахождение спектра в реальном времени даже для современной вычислительной техники представляет сложную задачу.

По этой причине представляет значительный интерес вычислительные процедуры, уменьшающие количество умножений и сложений.

Быстрое преобразование Фурье

- Основной принцип всех этих алгоритмов заключается в разложении операций вычисления ДПФ сигнала длины N на вычисление преобразований Фурье с меньшим числом точек. Разделив анализируемый набор отсчетов на части, вычисляют их ДПФ и объединяют результаты. Такие процедуры получили название алгоритмов *быстрого преобразования Фурье* БПФ.
- При реализации БПФ возможно несколько вариантов организации вычислений в зависимости от способа деления последовательности отсчетов на части (*прореживание по времени или по частоте*) и от того, на сколько фрагментов производится разбиение последовательности на каждом шаге (*основание БПФ*).

Быстрое преобразование Фурье

Рассмотрим алгоритмы БПФ с основанием 2, когда длина последовательности $N = 2^v$, где v – целое число.

- **БПФ с прореживанием по времени.** Рассмотрим идею БПФ с прореживанием по времени на примере деления набора отсчетов пополам. Введя общепринятое в литературе обозначение для дискретных экспоненциальных функций:

$$e_N(k, n) = e^{-j(2\pi/N)kn} = w_N^{nk}$$

Запишем ДПФ сигнала $x(n)$ в виде:

$$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{nk}$$

Быстрое преобразование Фурье

- Разобьем $x(n)$ на две $N/2$ -точечные последовательности, состоящие из отсчетов с четными и нечетными номерами соответственно. В результате получим:

$$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{n_{\text{ч}}}^{N/2-1} x(n) w_N^{nk} + \frac{1}{N} \sum_{n_{\text{нч}}}^{N/2-1} x(n) w_N^{nk}$$

- Заменяя индексы суммирования на $n = 2p$ при четном n и на $n = (2p + 1)$ при нечетном n , придем к выражению:

$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p) w_N^{2pk} + \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p+1) w_N^{(2p+1)k} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p) (w_N^2)^{pk} + \frac{1}{N} w_N^k \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p+1) (w_N^2)^{pk} \end{aligned}$$

Быстрое преобразование Фурье

- Так как $w_N^2 = w_{N/2}$, то предыдущее выражение можно записать в виде:

$$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p) w_{N/2}^{pk} + \frac{1}{N} w_N^k \sum_{p=0}^{N/2-1} x(2p+1) w_{N/2}^{pk} =$$

$$\frac{1}{2} G(k) + \frac{1}{2} w_N^k H(k). \quad (12.1)$$

- Каждая из сумм (12.1) является $N/2$ -точечным ДПФ: первая — для четных отсчетов исходной последовательности, а вторая — для нечетных. Несмотря на то, что индекс k в формуле (12.1) распространяется на N значений $k = 0, 1, \dots, (N-1)$, каждая из сумм требует вычислений только для $k = 0, 1, \dots, (N/2-1)$, так как $G(k)$ и $H(k)$ периодичны по k с периодом $N/2$. Объединение же этих сумм приводит к N -точечному ДПФ $c(k)$.

Быстрое преобразование Фурье

Схема БПФ

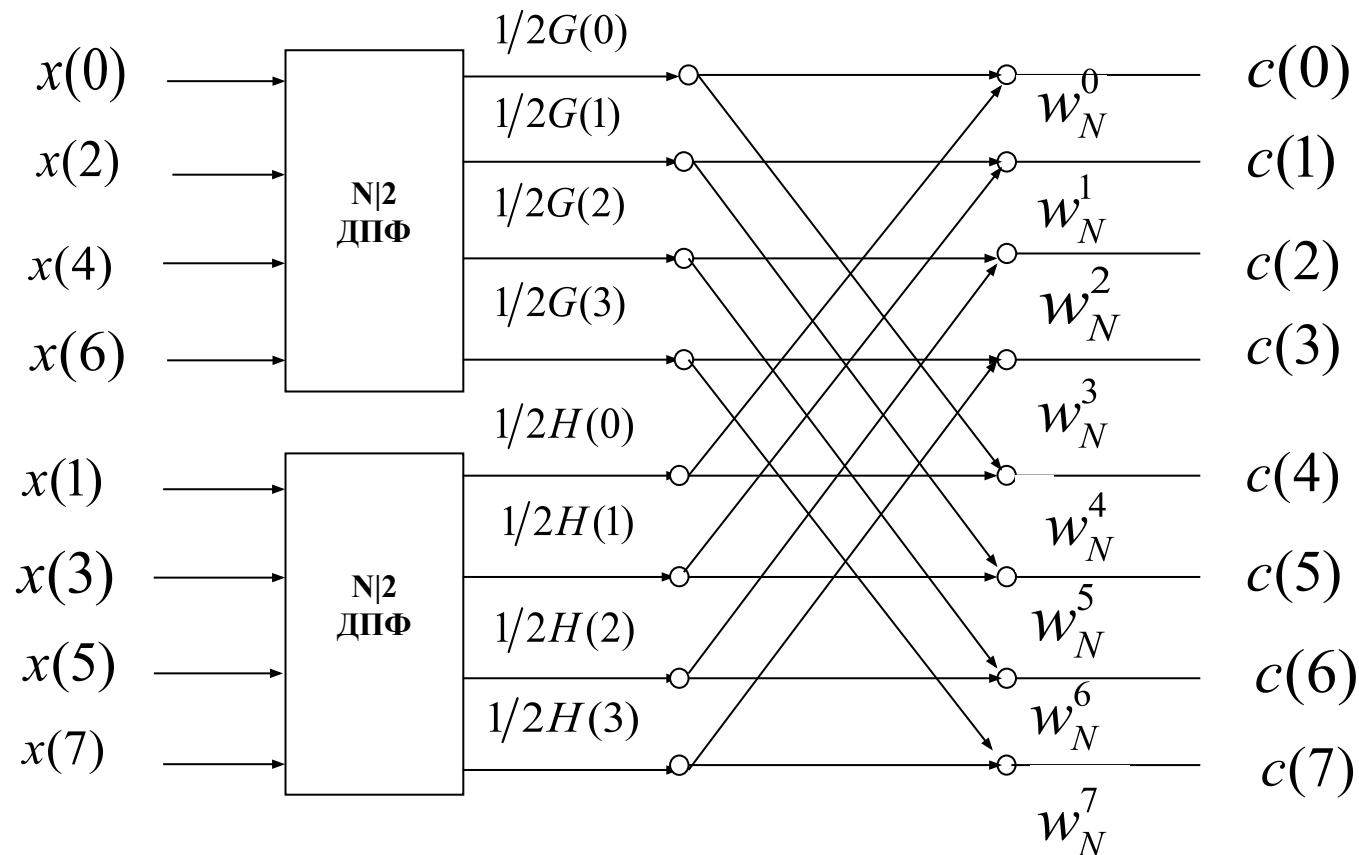


Рис.12.1

Быстрое преобразование Фурье

- Далее можно вычислить каждое $N/2$ -точечное ДПФ разбиением сумм на два $N/4$ -точечных ДПФ. Таким образом, $G(k)$ и $H(k)$ могут быть вычислены в виде:

$$\begin{aligned} G(k) &= \frac{2}{N} \sum_{p=0}^{N/2-1} g(p) w_{N/2}^{pk} = \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l) w_{N/2}^{2lk} + \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l+1) w_{N/2}^{(2l+1)k} = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l) w_{N/4}^{lk} + \frac{2}{N} w_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} g(2l+1) w_{N/4}^{lk} ; \end{aligned}$$

$$H(k) = \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N/4-1} h(2l) w_{N/4}^{lk} + \frac{2}{N} w_{N/2}^k \sum_{l=0}^{N/4-1} h(2l+1) w_{N/4}^{lk} .$$

Быстрое преобразование Фурье

- Продолжим описанную процедуру разбиения исходной ДПФ на преобразования меньшей размерности, пока не останутся только двухточечные преобразования. Двухточечные ДПФ (их число равно $N/2$) могут быть вообще вычислены без использования операций умножения. Действительно, для двухточечной последовательности $f(n)$, $n = 0, 1$; согласно определению ДПФ имеем два спектральных отсчета:

$$s(0) = 1/2 [f(0)w_2^0 + f(1)w_2^0] = f(0) + f(1)$$

$$s(1) = 1/2 [f(0)w_2^0 + f(1)w_2^1] = f(0) - f(1)$$

Быстрое преобразование Фурье

- Число требуемых при этом пар операций «умножение – сложение» можно оценить как $N \log_2 N$. Таким образом, вычислительные затраты по сравнению с непосредственным использованием формулы ДПФ уменьшаются в $N/\log_2 N$ раз. При больших N это отношение становится весьма велико. Например, при $N = 1024$ достигается более чем 100-кратное ускорение, но и это еще не предел. Количество комплексных умножений в алгоритме БПФ с прореживанием по времени может быть сокращено вдвое.

Быстрое преобразование Фурье

- Из рассмотренного алгоритма следует, что на каждой ступени вычислений происходит преобразование одного множества из N комплексных чисел в другое множество из N комплексных чисел.
- Будем считать $x_m(l)$ входным массивом на m -й ступени вычисления, а $x_{m+1}(l)$ – выходным массивом на $(m+1)$ ступени вычислений.

С учетом введенных обозначений имеем:

$$x_{m+1}(p) = \frac{1}{2} \left[x_m(p) + w_N^r x_m(q) \right];$$

$$x_{m+1}(q) = \frac{1}{2} \left[x_m(p) + w_N^{r+N/2} x_m(q) \right].$$

Быстрое преобразование Фурье

- Вышеприведенные соотношения подсказывают метод сокращения числа комплексных умножений вдвое. Так как $w_N^{N/2} = -1$, эти соотношения можно записать в виде:

$$x_{m+1}(p) = \frac{1}{2} [x_m(p) + w_N^r x_m(q)];$$

$$x_{m+1}(q) = \frac{1}{2} [x_m(p) - w_N^r x_m(q)].$$

- Так как на каждую ступень разбиения имеется $N/2$ таких операций, а общее число ступеней равно $\log_2 N$, то общее число пар операций «умножение-сложение» сокращается до $\frac{N}{2} \log_2 N$.