

Тема урока:
**Арифметическая и
геометрическая прогрессия**

Изучена данная тема,
Пройдена теории схема,
Вы много новых формул узнали,
Задачи с прогрессией решали.
И вот в последний урок
Нас поведет
Красивый лозунг
“ПРОГРЕССИО - ВПЕРЕД”

- 1) 2; 5; 8; 11; 14; 17; ... арифметическая прогрессия $d = 3$
- 2) 3; 9; 27; 81; 243; ... геометрическая прогрессия $q = 3$
- 3) 1; 6; 11; 20; 25; ... последовательность чисел
- 4) $-4; -8; -16; -32; \dots$ геометрическая прогрессия $q = 2$
- 5) 5; 25; 35; 45; 55; ... последовательность чисел
- 6) $-2; -4; -6; -8; \dots$ арифметическая прогрессия $d = -2$

- Закончился XX век, а вот термин “прогрессия” был введен римским автором Боэцием еще в IV в. н.э. От латинского слова *progressio* – “движение вперед”. Первые представления об арифметической прогрессии были еще у древних народов. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии и указания как их решать. Считалось, что в древнеегипетском папирусе Ахмеса находилась древнейшая задача на прогрессии о вознаграждении изобретателя шахмат, насчитывающая за собою двухтысячелетнюю давность. Но есть гораздо более старая задача о делении хлеба, которая записана в знаменитом египетском папирусе Ринда. Папирус этот, разысканный Риндом полвека назад, составлен около 2000 лет до нашей эры и является списком с другого, еще более древнего математического сочинения, относящегося, быть может, к третьему тысячелетию до нашей эры. В числе арифметических, алгебраических и геометрических задач этого документа имеется такая, которую мы приводим в вольной передаче.

Задача 1: (задача из папируса Ринда)

- Сто мер хлеба разделили между 5 людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых получили в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение: Очевидно, количество хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член x , разность y . Тогда:

- a_1 —Доля первого — x ,
- a_2 —Доля второго — $x+y$,
- a_3 —Доля третьего — $x+2y$,
- a_4 —Доля четвертого — $x+3y$,
- a_5 —Доля пятого — $x+4y$.
- На основании условия задачи составляем следующие 2 уравнения:

На основании условия задачи составляем следующие
2 уравнения:

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100 \\ 7(x + (x + y)) = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 20 \\ 11x = 2y \end{cases}$$

Решив эту систему, имеем: $x = 1\frac{2}{3}$ $y = 9\frac{1}{6}$

Значит, хлеб должен быть разделен на

следующие части: $1\frac{2}{3}; 10\frac{5}{6}; 20; 29\frac{1}{6}; 38\frac{1}{3}.$

Устная работа

1) Дано: (a_n) арифметическая прогрессия

$$a_1 = 5 \quad d = 3$$

Найти: a_6 ; a_{10} .

Решение: используя формулу $a_n = a_1 + (n - 1) d$

$$a_6 = a_1 + 5 d = 5 + 5 \cdot 3 = 20$$

$$a_{10} = a_1 + 9 d = 5 + 9 \cdot 3 = 32$$

Ответ: 20; 32

Устная работа

2) Дано: (b_n) геометрическая прогрессия

$$b_1 = 5 \quad q = 3$$

Найти: b_3 ; b_5 .

Решение: используя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$

$$b_3 = b_1 q^2 = 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$$

$$b_5 = b_1 q^4 = 5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405$$

Ответ: 45; 405.

Устная работа

3) Дано: (a_n) арифметическая прогрессия

$$a_4 = 11 \quad d = 2$$

Найти: a_1 .

Решение: используя формулу $a_n = a_1 + (n - 1) d$

$$a_4 = a_1 + 3 d ; a_1 = a_4 - 3 d = 11 - 3 \cdot 2 = 5$$

Ответ: 5.

Устная работа

4) Дано: (b_n) геометрическая прогрессия

$$b_4 = 40 \quad q = 2$$

Найти: b_1 .

Решение: используя формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$

$$b_4 = b_1 q^3 ; b_1 = b_4 : q^3 = 40 : 2^3 = 40 : 8 = 5$$

Ответ: 5.

Занимательное свойство арифметической прогрессии.

А теперь, рассмотрим еще одно свойство членов арифметической прогрессии. Оно, скорее всего, занимательное. Нам дана “стаяка девяти чисел”

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Она представляет собой арифметическую прогрессию. Кроме того, данная стайка чисел привлекательна способностью разместиться в девяти клетках квадрата так, что образуется магический квадрат с константой, равной 33

Знаете ли вы, что такое магический квадрат?

Квадрат, состоящий из 9 клеток, в него вписывают числа, так чтобы сумма чисел по вертикали, горизонтали диагонали была одним и тем же числом — *constant*.

9	19	5
7	11	15
17	3	13

Замечание об арифметической прогрессии само по себе очень интересно. Дело в том, что из каждых девяти последовательных членов любой арифметической прогрессии натуральных чисел можно составить магический квадрат.

- Пусть дана арифметическая прогрессия: $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+8d$, где a и d натуральные числа. Расположим её члены в таблицу.

Нетрудно видеть, что получился магический квадрат, константа C которого равна $3a+12d$.

Действительно, сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и по каждой диагонали квадрата равна $3a+12d$.

$a+3d$	$a+8d$	$a+d$
$a+2d$	$a+4d$	$a+6d$
$a+7d$	a	$a+5d$

Свойства арифметической прогрессии

Дано: (a_n) арифметическая прогрессия

$$a_4 = 12,5; a_6 = 17,5$$

Найти: a_5

Решение: используя свойство арифметической прогрессии имеем:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{12,5 + 17,5}{2} = 15$$

Ответ: 15(0)

Свойства геометрической прогрессии

Дано: (b_n) геометрическая прогрессия, $b_n > 0$

$$b_4 = 6; b_6 = 24$$

Найти: b_5

Решение: используя свойство

геометрической прогрессии имеем:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$$b_5^2 = b_4 \cdot b_6 \Rightarrow b_5 = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$$

Ответ: 12(Д)

«Карусель» — обучающая самостоятельная работа

- 1) Дано: (a_n) , $a_1 = -3$, $a_2 = 4$. Найти: $a_{16} - ?$
- 2) Дано: (b_n) , $b_{12} = -32$, $b_{13} = -16$. Найти: $q - ?$
- 3) Дано: (a_n) , $a_{21} = -44$, $a_{22} = -42$. Найти: $d - ?$
- 4) Дано: (b_n) , $b_n > 0$, $b_2 = 4$, $b_4 = 9$. Найти: $b_3 - ?$
- 5) Дано: (a_n) , $a_1 = 28$, $a_{21} = 4$. Найти: $d - ?$
- 6) Дано: (b_n) , $q = 2$. Найти: $b_5 - ?$
- 7) Дано: (a_n) , $a_7 = 16$, $a_9 = 30$. Найти: $a_8 - ?$

1) (П) ; 2) (В) ; 3) (Р) ; 4) (Г) ; 5) (Е) ; 6) (С) .

Ответы:

1) 102; (П)

2) 0,5; (В)

3) 2; (Р)

4) 6; (Г)

5) – 1,2; (Е)

6) 8; (С)

Задания из сборника предназначенного для подготовки к итоговой аттестации в новой форме по алгебре в 9 классе, предлагаются задания которые оцениваются в 2 балла:

- 6.1. 1) Пятый член арифметической прогрессии равен 8,4, а ее десятый член равен 14,4. Найдите пятнадцатый член этой прогрессии.
- 6.2. 1) Число $-3,8$ является восьмым членом арифметической прогрессии (a_n) , а число -11 является ее двенадцатым членом. Является ли членом этой прогрессии число $-30,8$?
- 6.5. 1) Между числами 6 и 17 вставьте четыре числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали арифметическую прогрессию.
- 6.8. 1) В геометрической прогрессии $b_{12} = 3^{15}$ и $b_{14} = 3^{17}$. Найдите b_1 .

Ответы:

6.1 (20,4) (И)

6.2. (является),

6.5. (6;8,2;10'4;12'6;14'8;17.),

6.8. ($b_1=3^4$ или $b_1=-3^4$).

5	2	3	4	2	1	6	6	8	3

9	5	1	2	1	7

5	2	3	4	2	1	6	6	8	3
П	Р	О	Г	Р	Е	С	С	И	О

9	5	1	2	1	7
В	П	Е	Р	Ё	Д

Урок сегодня завершён,
Дружней вас не сыскать.
Но каждый должен знать:
Познание, упорство, труд
К прогрессу в жизни приведут.

Спасибо за урок!