# Анализ данных в Mathcad

**Математические вычисления**

# Аппроксимация (приближение)

- Математический метод, состоящий в замене одних математических объектов другими, близкими к исходным, но более простыми.
- Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются, или свойства которых уже известны).

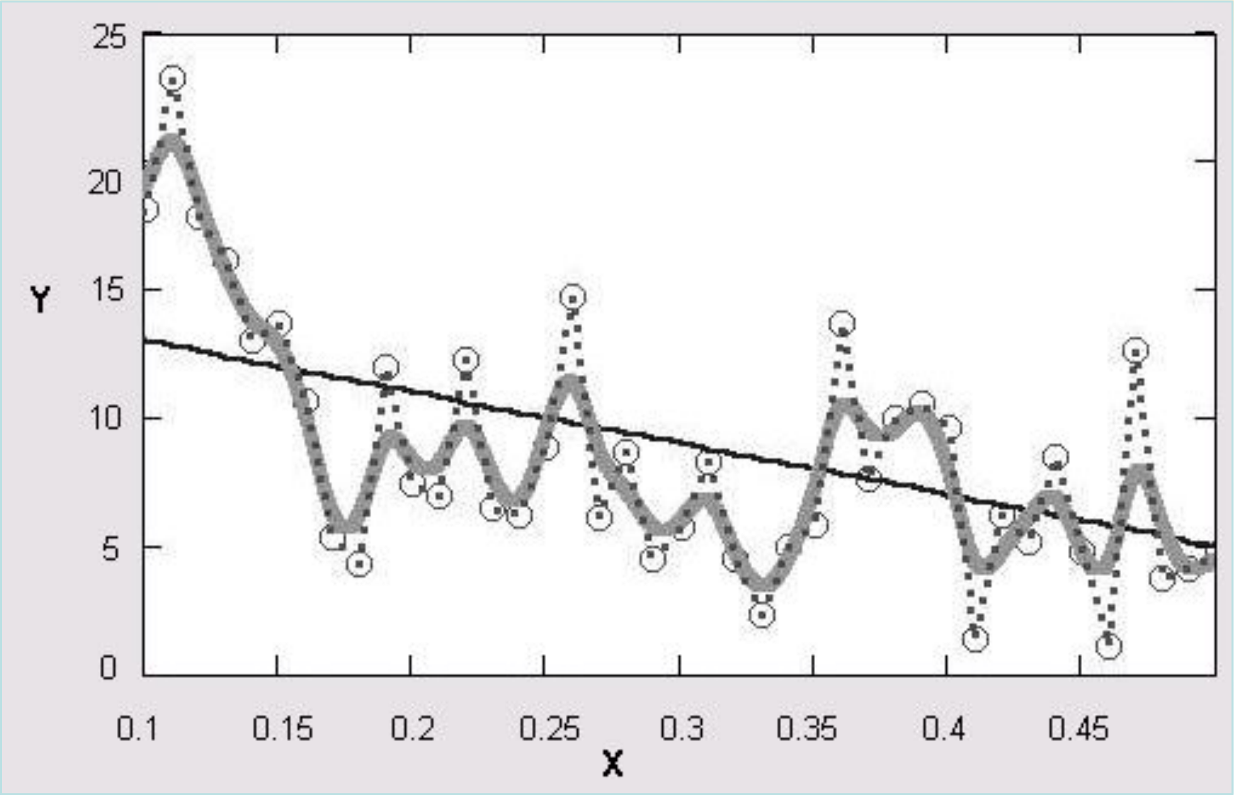
## Аппроксимация функций заключается в приближенной замене заданной функции $f(x)$ некоторой функцией □($x$) так, чтобы отклонение функции □($x$) от $f(x)$ в заданной области было наименьшим.

- Когда имеется выборка экспериментальных данных, то она, чаще всего, представляются в виде массива, состоящего из пар чисел ($xi$,$yi$).
- Поэтому возникает задача аппроксимации дискретной зависимости $y(xi)$ непрерывной функцией $f(x)$. Функция $f(x)$, в зависимости от специфики задачи, может отвечать различным требованиям.

# Требования

1. Функция $f(x)$ должна проходить через точки $(xi,yi)$, т. е. $f(xi)=yi$ , $i=1…n$. В этом случае говорят об интерполяции данных функцией $f(x)$ во внутренних точках между $xi$, или экстраполяции за пределами интервала, содержащего все $xi$.
2. Функция $f(x)$ должна некоторым образом приближать $y(xi)$, не обязательно проходя через точки $(xi,yi)$. Такова постановка задачи регрессии.
3. Функция $f(x)$ должна приближать экспериментальную зависимость $y(xi)$, учитывая, к тому же, что данные $(xi,yi)$ получены с некоторой погрешностью. При этом функция $f(x)$, с помощью того или иного алгоритма уменьшает погрешность, присутствующую в данных $(xi,yi)$. Такого типа задачи называют задачами фильтрации. Сглаживание - частный случай фильтрации.

# Различные виды построения аппроксимирующей зависимости *f* (*x*)



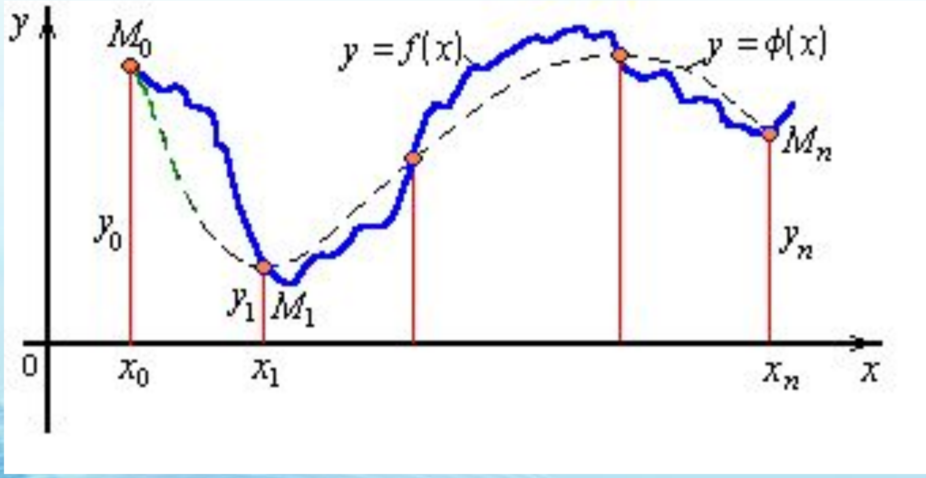

исходные данные, интерполяция, линейная регрессия, сглаживание.

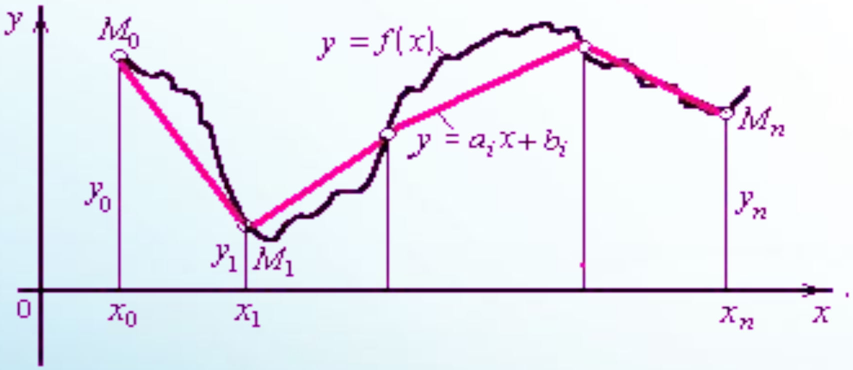
# Интерполяция

- Задача интерполяции функции одной переменной состоит в замене дискретной зависимости $y(xi)$, т. е. $N$ пар чисел $(xi,yi)$, или, по-другому, узлов, некоторой непрерывной функцией $y(x)$.
- При этом основным условием является то, что функция $y(x)$ должна проходить через точки $(xi,yi)$, т. е. $y(xi)=yi$ ,$i$=1…$N$, а также возможность вычислить значение $y(x)$ в любой точке, находящейся между узлов.

# Виды интерполяции

- Глобальная
- Локальная



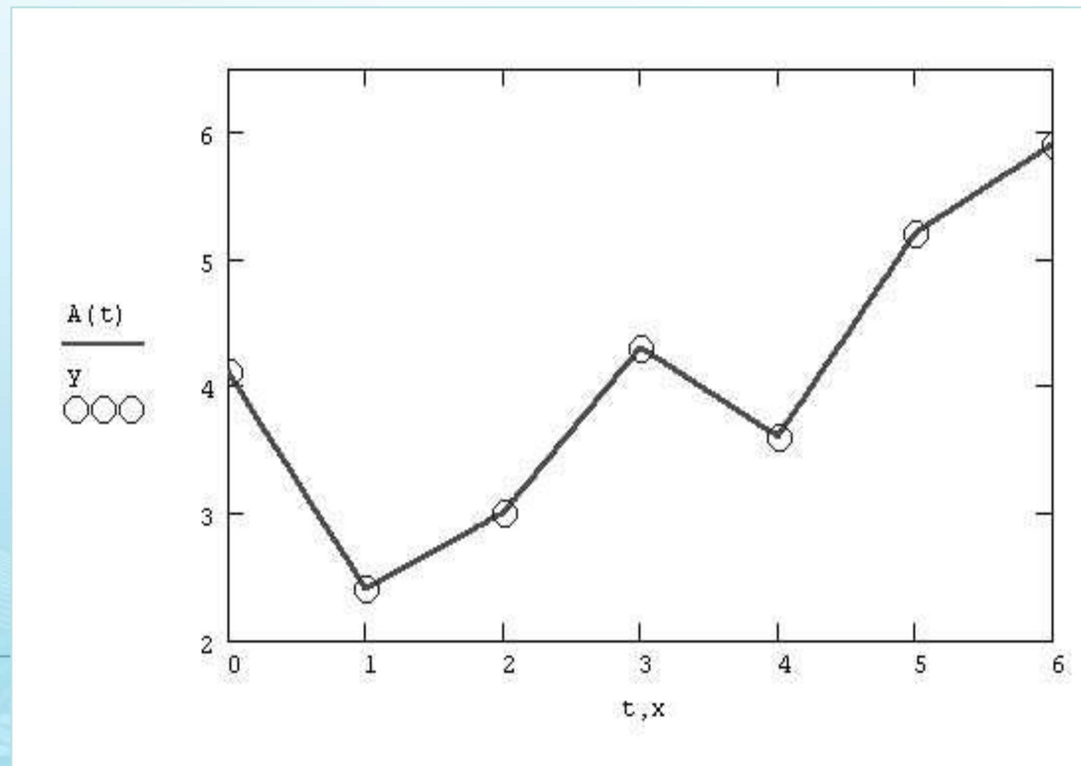
# Локальная интерполяция

- При локальной интерполяции между различными узлами выбираются различные многочлены невысокой степени.
- В среде Mathcad есть для этого инструментарий: средства линейной интерполяции (функция linterp) и интерполяции сплайном – линейным (lspline), параболическим (pspline) и кубическим (cspline).

# Линейная интерполяция (кусочно-линейная)

- Самый простой вид интерполяции, которая представляет искомую зависимость $y(x)$ в виде ломаной линии. Интерполирующая функция $y(x)$ состоит из отрезков прямых, соединяющих точки $(xi,yi)$

- Для правки структуры щелкните мышью



# Сплайн-интерполяция

**Сплайн** – это математическая модель гибкого, тонкого стержня из упругого материала. Стержень закрепляется в двух соседних узлах с заданными углами наклона. Стержень длиннее, чем расстояние между двумя точками. Линия, которую описывает сплайн-функция, напоминает по форме гибкую линейку, закреплённую в узловых точках (откуда и название: spline – гибкая линейка).

- В большинстве практических приложений лучше соединить экспериментальные точки ($xi$,$yi$) не ломаной линией, а гладкой кривой.
- Лучше всего для этих целей подходит интерполяция $y(x)$ квадратичными или кубическими сплайнами, т. е. отрезками квадратичных или кубических парабол.
- Сплайн-интерполяция обеспечивает равенство в узлах не только самих соседних параболических интерполирующих функций (сплайнов), но и их производных. Благодаря этому сплайн-интерполяция выглядит как очень гладкая функция.

# Локальная интерполяция

***Линейная интерполяция***

| | |
|---|---|
| linterp(vx, vy, x) | Использует векторы данных vx и vy, чтобы возвратить линейно интерполируемое значение y, соответствующее третьему аргументу x. |

***Сплайновая интерполяция*** *(проходит в два этапа)*

| | |
|---|---|
| lspline(vx, vy)<br>pspline(vx, vy) | Все эти функции возвращают вектор коэффициентов вторых |

# Линейное предсказание

определение значений вне набора данных

# Экстраполяция

- Интерполяция дает возможность по значениям табличной функции находить значения в промежуточных точках. Однако бывают случаи, когда необходимо оценить табличную функцию за пределами ее области данных.
- Такие предсказания позволяют осуществлять отдельные численные методы. Принцип их работы основывается на анализе поведения зависимости в нескольких ее точках.
- В Mathcad функцией, реализующей один из алгоритмов предсказания (метод линейного предсказания Берга), является встроенная функция **predict**.

# **Формат функции**: predict(vy,m,n)

- **vy** – вектор табличных значений функции (элементы вектора должны быть взяты через равные интервалы);
- **m** – число последних исходных значений табличной функции, по которым выполняется прогноз;
- **n** – число предсказанных значений.

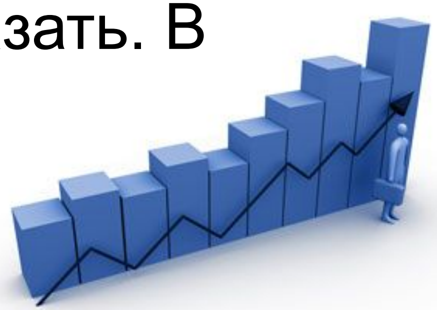
# Пример

- Пусть получен вектор данных из таблицы

$$Y := \begin{pmatrix} 0.86 \\ 0.77 \\ 0.7 \\ 0.63 \\ 0.58 \\ 0.52 \\ 0.47 \\ 0.39 \end{pmatrix}$$

Определение m, число известных значений Y по которым будет построена экстраполяция, в нашем случае m = 8 (функция length);

Определение n, число значений Y, по которым строится экстраполяция + количество точек которое необходимо предсказать. В нашем случае n = 13.



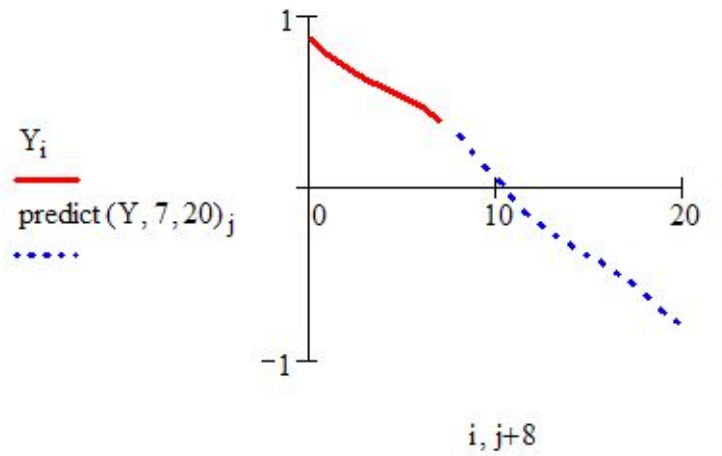
# Построим график функции предсказания

- Для наглядности построим на одном графике исходную функцию (по точкам) и функцию предсказания, причем таким образом, чтобы последняя являлась продолжением первой функции.
- Для этого необходимо:
  - Так как мы имеем 8 значений исходных данных, то будем строить исходную функцию в 8 точках:

    **i:=0..7**

# Построим график функции предсказания

- Так как мы собираемся строить экстраполяцию для 13-ти точек, то **j:=0..13**
- Построим график функций. Причем необходимо обратить внимание, что мы сдвинули начало координат для функции предсказания на 8 точек вправо
(потому что исходная функция кончается на 8-й точке) с помощью выражения **j+8**.




# Применение

- Функция предсказания обеспечивает достаточно высокую точность для аналитических зависимостей, при монотонных исходных функциях или исходных функциях, представляемых полиномом невысокой степени при достаточно большом числе исходных точек.
- Для хорошего прогноза необходимо тщательно подбирать число $m$, иначе качество прогноза может сильно ухудшиться.

# Глобальная интерполяция

- Кубические сплайны - это мощное и удобное средство, но необходимо учитывать влияние направления и величины касательных векторов, указывать все точки кривой до ее изображения, невозможна локальная коррекция кривой. Расчет кубического сплайна требует обращения большой матрицы, зависящей от всех элементов сплайна; т. е. изменение любого сегмента затрагивает все остальные сегменты. Воздействие уменьшается при удалении от точки возмущения, но полностью пренебречь им нельзя.
- Параболическая интерполяция разрешает большинство этих проблем за счет того, что она только непрерывна, т. е. в точках соединения сегментов сохраняется непрерывность лишь первой производной, причем параболическая интерполяция не требует больших расчетов.

$x_1$, ..., $x_n$ совпадают со значениями $y_0$, $y_1$, ..., $y_n$ функции *f* в этих точках. Многочлен $P_n(x)$ определяется единственным образом, но в зависимости от задачи его удобно записывать различными по виду формулами.

- Интерполяционная формула Лагранжа
- Интерполяционная формула Ньютона
- Интерполяционная формула Стирлинга
- Интерполяционная формула Бесселя

- **Интерполяционные формулы,** формулы, дающие приближённое выражение функции $y = f(x)$ при помощи *интерполяции,* т. е. через интерполяционный многочлен $P_n(x)$ степени *n*, значения которого в заданных точках $x_0$, $x_1$, ..., $x_n$ совпадают со значениями $y_0$, $y_1$, ..., $y_n$ функции *f* в этих точках. Многочлен $P_n(x)$ определяется единственным образом, но в зависимости от задачи его удобно записывать различными по виду формулами.


- Интерполяционная формула Лагранжа
- Интерполяционная формула Ньютона
- Интерполяционная формула Стирлинга
- Интерполяционная формула Бесселя


# Интерполяция функций по Лагранжу

- Приблизить таблично заданную функцию можно не привязываясь к конкретной точке (локальная интерполяция), а использовать все узловые точки (глобальная).

  - Пусть некоторая функция $f(x)$ определена рядом своих узловых точек $(xi, yi)$ на некотором отрезке $[a, b]$.
    Под *интерполяцией* подразумевается вычисление значений $f(x)$ в любом промежутке $[xi, xi+1]$ в пределах отрезка $[a,b]$.
    Соответственно, любое вычисление $f(x)$ вне отрезка $[a,b]$ является *экстраполяцией*.
  - Значения $f(x)$ вычисляются с помощью аппроксимирующего полинома: $f_a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_i a^i + \ldots + a_2 x^2 + a_i x + a_0 = \sum_{i=0} a_i x^i$

- Реализация полиномиальной аппроксимации сводится к вычислению коэффициентов полинома $an, an{-}1, \ldots, a1, a0$ так, чтобы точки $fa(xi)$ точно совпадали с узловыми точками.

# Решение задачи

**ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ПО ФОРМУЛЕ ЛАГРАНЖА**

$$xi := \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad yi := \begin{pmatrix} 10 \\ 42 \\ 35 \\ 4 \\ 95 \end{pmatrix}$$

Векторы xi и yi задают таблицу интерполируемой функции для последующей интерполяции методом Лагранжа с применением общей формулы интерполяции

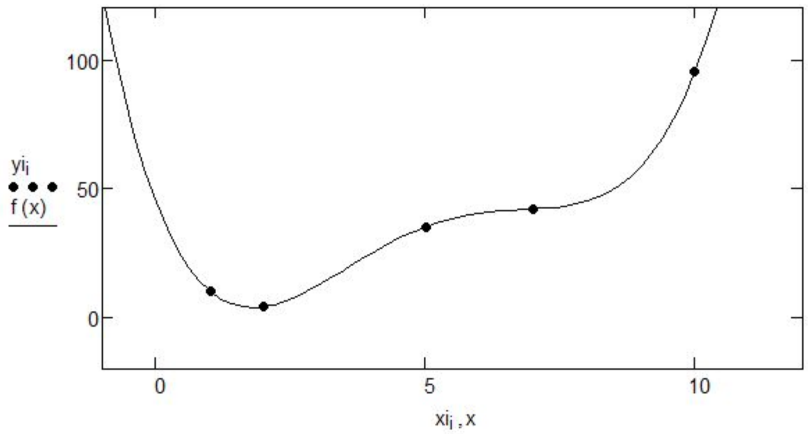
$n := \mathrm{length}(xi) - 1 \qquad i := 0..n \qquad j := 0..n$

$$f(x) := \sum_{i=0}^{n} \left( yi_i \cdot \frac{\prod_{j=0}^{n} \mathrm{if}(i = j, 1, x - xi_j)}{\prod_{j=0}^{n} \mathrm{if}(i = j, 1, xi_i - xi_j)} \right)$$

Общая формула интерполяции Лагранжа

Примеры интерполяции и экстраполяции: $f(-1) = 125.067 \quad f(2) = 4 \quad f(6) = 40.315 \quad f(10.5) = 126.874$

$i := 0..n \qquad x := -1, -0.8..12$




Построение по данным интерполяции графика функции с нанесенными на него узловыми точками - темными кружками. График проходит точно через узловые точки, которые расположены неравномерно.

# Параболическая интерполяция

- Кривая полинома точно должна пройти через все узловые точки.
- Особенностью глобальной полиномиальной интерполяции (параболической интерполяции) является однозначное соответствие между числом узловых точек $N$ аппроксимируемой функции и степенью полинома $n=N-1$.
  - На практике можно нередко задать функцию множеством точек , но тогда степень полинома станет очень большой, его вычисления займут много времени, а точность вычислений резко ухудшается. Максимальная степень полинома не должна превышать 8-10.

# Пример

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 52 \\ 23 \\ 2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

**ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ**

Векторы x и y задают узловые точки (x,y)

$n := \mathrm{length}(x) - 1 \qquad n = 5$ Вычисление степени полинома

$i := 0..n \quad j := 0..n \qquad D_{i,j} := (x_i)^j$ Формирование матрицы D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.04 & 0.008 & 0.0016 & 0.00032 \\ 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 & 0.0256 & 0.01024 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 & 0.1296 & 0.07776 \\ 1 & 0.8 & 0.64 & 0.512 & 0.4096 & 0.32768 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определитель Вандермонда

Вычисление коэффициентов a полинома из решения системы линейных уравнений (можно использовать любой способ для решения СЛАУ, например a:=D^-1*y):

$a := \mathrm{lsolve}(D, y)$

$P(x) := \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \cdot x^i\right)$ Определение полинома P(x)

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 745.333 \\ -3.41 \times 10^3 \\ 5.698 \times 10^3 \\ -4.115 \times 10^3 \\ 1.094 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

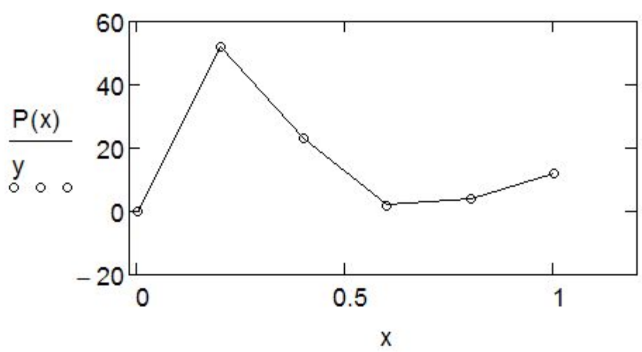



График полинома P(x) и нанесенные на него узловые точки.Для этого вида интерполяции характерно, что график точно проходит через узловые точки.