



Решение неравенств





Для любых двух простейших чисел a и b выполняется одно из двух условий: либо a больше b ($a > b$), либо a меньше b ($a < b$).

Если вместо чисел a и b взять выражения $A(x)$ и $B(x)$, то соотношения между их числовыми значениями будут зависеть от того какое число подставить вместо x .

Возникает задача: найти все – **значения x** , которые при подстановке в запись **$A(x)$ и $B(x)$** превращают её в верное числовое неравенство.

Эта запись называется **неравенством** с неизвестным x , а искомые значения **x** – его **решением**.

Неравенства делятся на *строгие* и *нестрогие*



Строгое неравенство $A(x) > B(x)$

Строгое неравенство $A(x) < B(x)$

$A(x) \geq B(x)$ Не строгое неравенство

$A(x) \leq B(x)$ Не строгое неравенство



Решим простейшее **линейное**
неравенство

$$5x + 3 > 3x + 7$$

Сначала вычтем из обеих частей $3x + 3$:

$$2x > 4$$

Этот перевод опирается на одно из важнейших свойств числовых неравенств:

**Для любых действительных
чисел a , b и c если $a > b$, то
 $a + c > b + c$.**



Если x_0 – решение данного неравенства, то, добавляя к обоим частям число

$c = -(3x_0 + 3)$, получим, что x_0 удовлетворяет и неравенству $2x_0 > 4$. Верно и обратное. Пользуясь другим свойством неравенств,

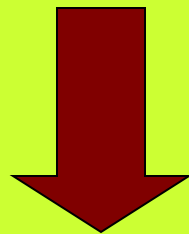
если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$,

разделим обе части на 2. Получим

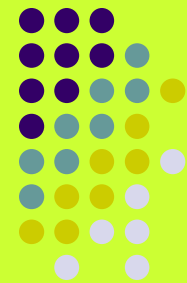
$$x > 2.$$

Всё множество решений представляется числовым лучом $(2; \infty)$.

Теперь решим квадратное неравенство



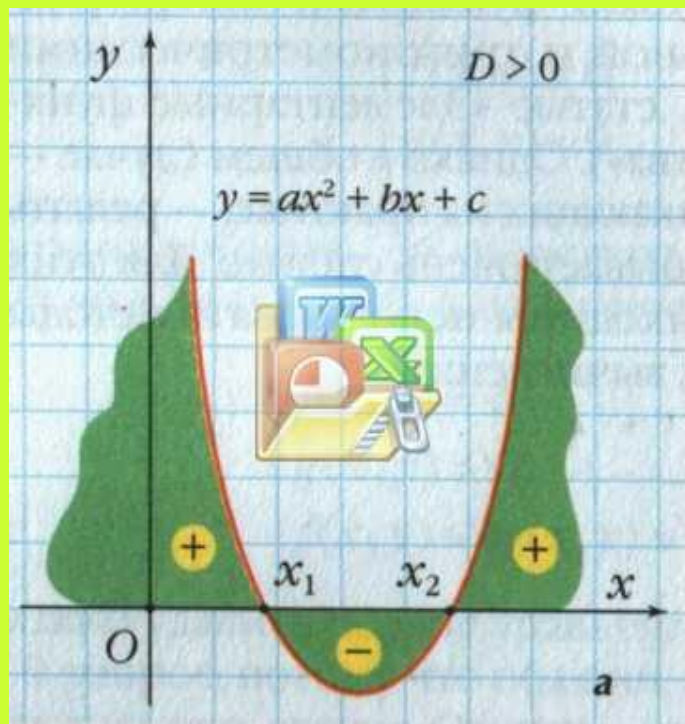
$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ где } a \neq 0.$$



Рассмотрим дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трёхчлена $q(x) = ax^2 + bx + c$.

Допустим, что сначала $D > 0$, то есть $q(x)$ имеет два корня x_1 и x_2 . Тогда неравенство можно записать в виде

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0.$$

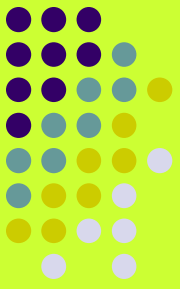


При $a > 0$ множество решений неравенства – объединение двух лучей:

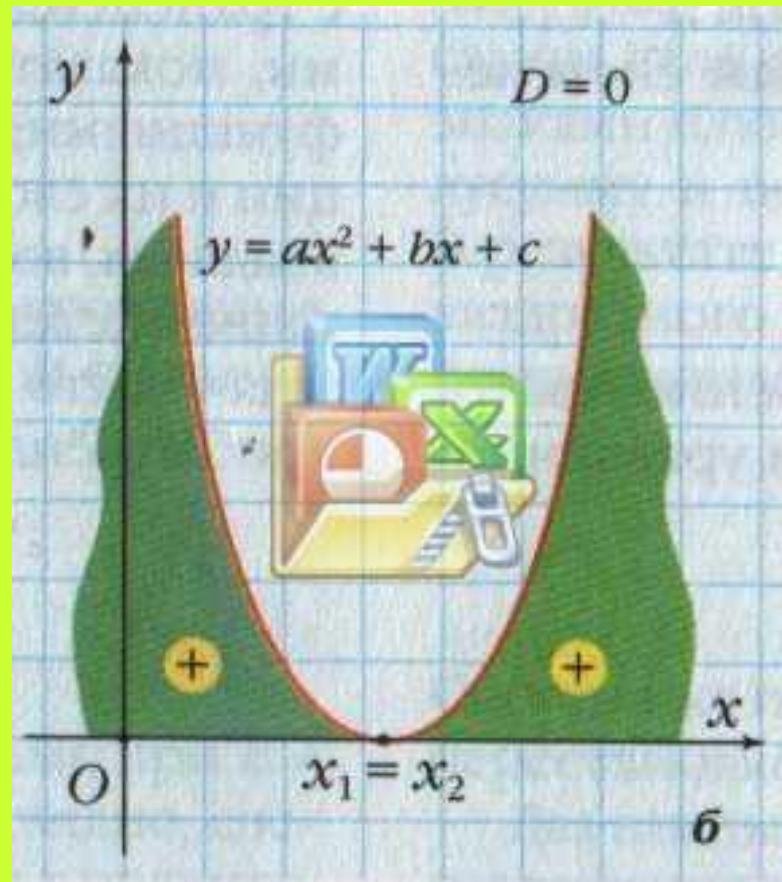
$$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty),$$

А при $a < 0$ – интервал (x_1, x_2) .

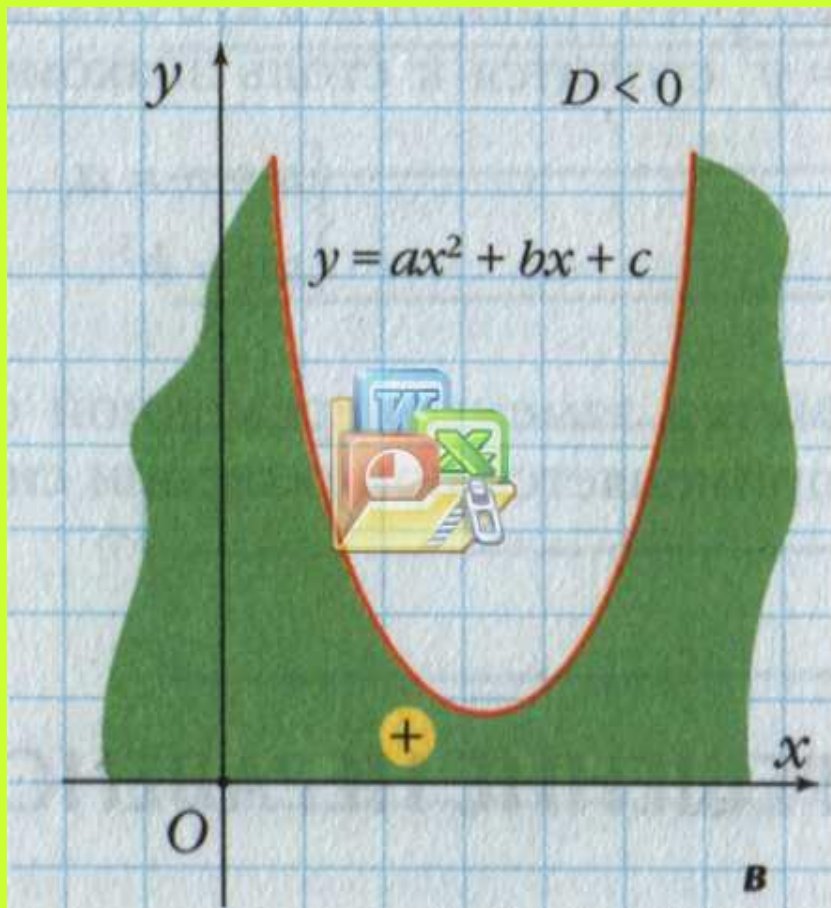




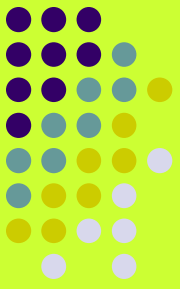
Случай **$D = 0$** , когда $x_1 = x_2$ и
 $q(x) = a(x - x_1)^2$, рассматривается
аналогично



Если же $D < 0$, то функция $q(x)$ имеет один и тот же знак на всей действительной прямой.



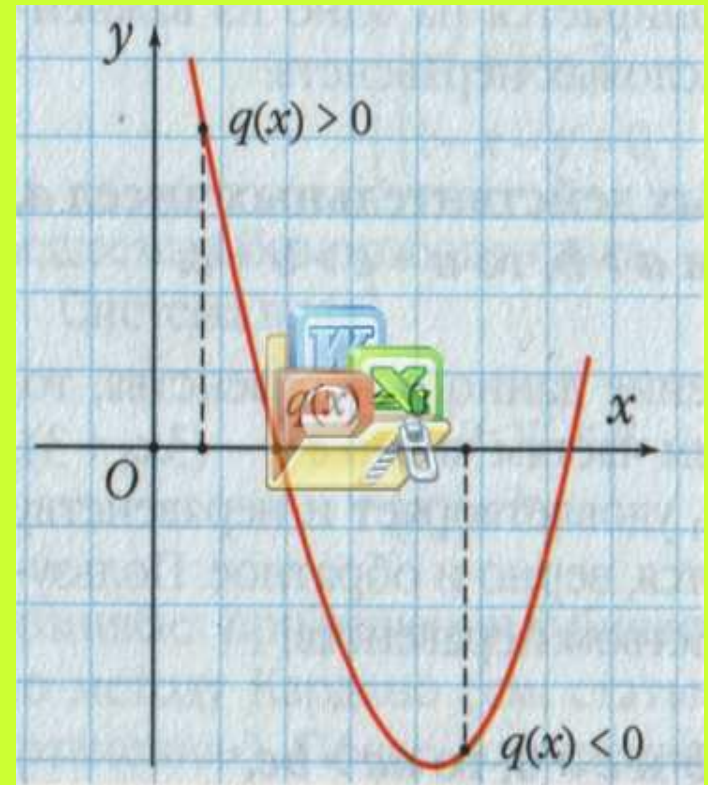
То есть функция $q(x)$
положительна
при $a > 0$
и **отрицательна**
при $a < 0$.



**Итог нашего маленького исследования
подведём в следующей таблице:**

Дискри- минант	Решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ при	
	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$(x_1; x_2)$
$D = 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	Решений нет
$D < 0$	$(-\infty; \infty)$	Решений нет

Квадратное неравенство можно решать иначе. Квадратичная функция $q(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, поэтому если на графике есть точка ниже оси Ox и точка выше оси Ox , то он должен пересечь ось между этими точками. На этом свойстве основан другой способ решения квадратных неравенств – **метод интервалов**.



Алгоритм решения неравенств методом интервалов (квадратных и не только):



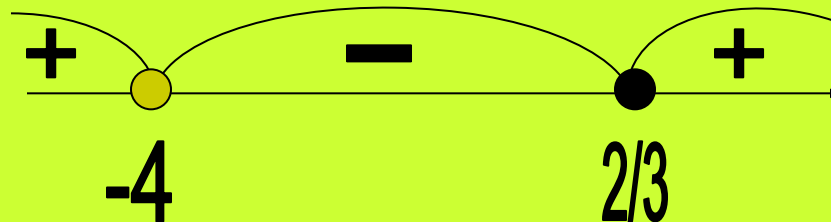
- 1. Найдём нули функции (абсциссы точек пересечения графика данной функции с осью Ox).**
- 2. Отметить нули функции на координатной прямой пустыми (если неравенство строгое) или сплошными (если неравенство не строгое) точками.**
- 3. Определить знак функции на каждом промежутке (а для квадратичной функции достаточно определить знак лишь в одном из промежутков, так как знаки будут чередоваться потому, что функция непрерывна на всей области определения).**
- 4. а) Выделить те промежутки, где $q(x) > 0$.
б) Выделить те промежутки, где $q(x) < 0$.**

Пример:

решим неравенство методом интервалов.

$$\frac{3x - 2}{x + 4} \geq 0$$

1. Нули функции $2/3$;
2. Область определения: $x \neq -4$;
- 3.



Ответ: $(-\infty; -4) \cup [2/3; \infty)$



Над роликом работали: ученицы 9 В класса
МОУ «СОШ № 17» г. Прокопьевска

