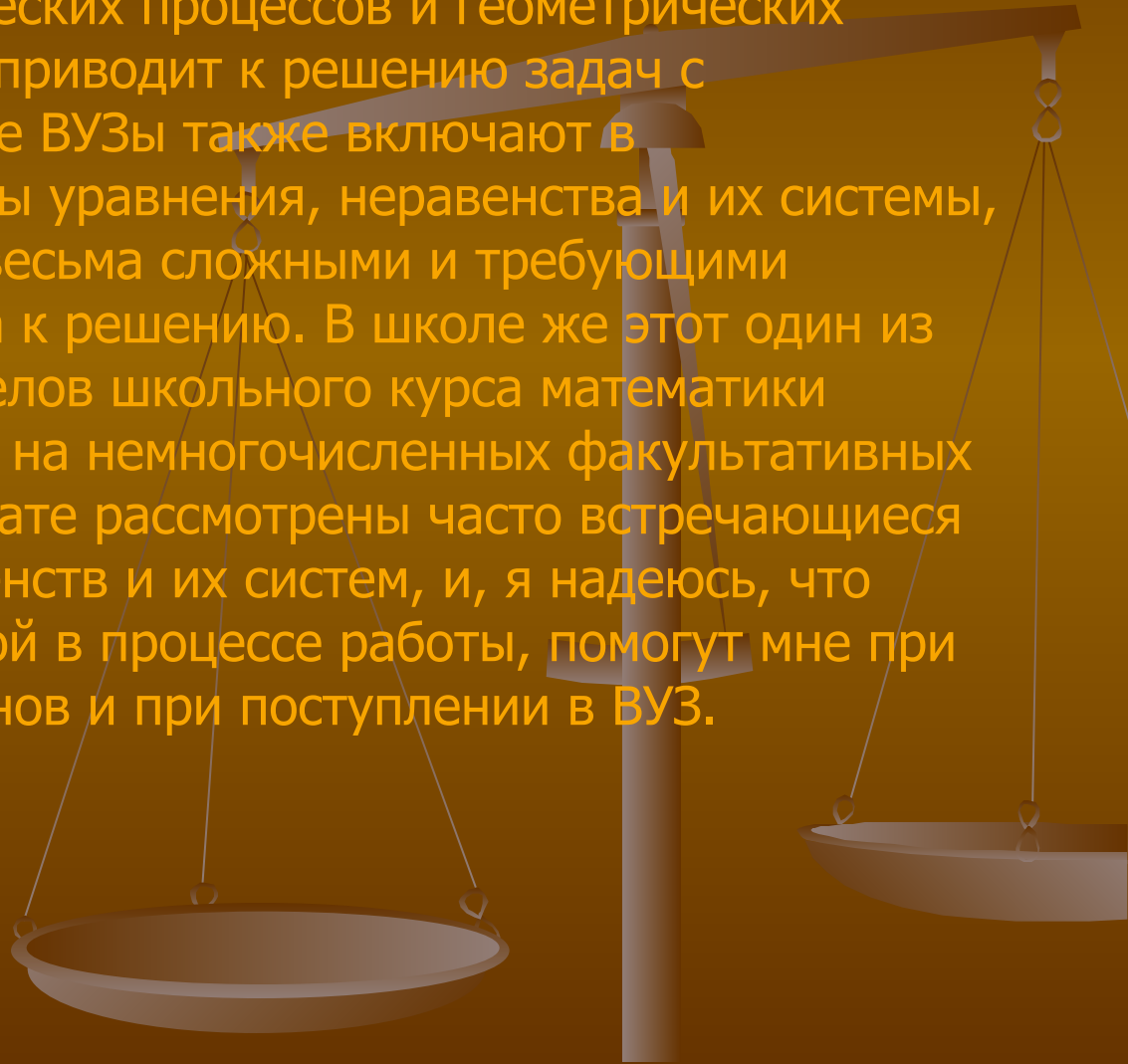


# Алгебраические преобразования с параметрами

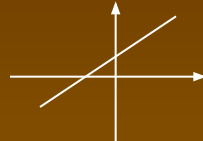
- Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами. Некоторые ВУЗы также включают в экзаменационные билеты уравнения, неравенства и их системы, которые часто бывают весьма сложными и требующими нестандартного подхода к решению. В школе же этот один из наиболее трудных разделов школьного курса математики рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях. В моем реферате рассмотрены часто встречающиеся типы уравнений, неравенств и их систем, и, я надеюсь, что знания, полученные мной в процессе работы, помогут мне при сдаче школьных экзаменов и при поступлении в ВУЗ.



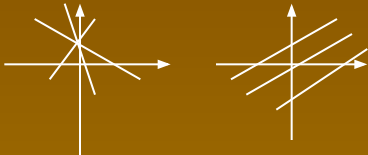
# Введение

- Первой, и, пожалуй, самой просто функцией является линейная функция  $y=kx+m$ .

Вы знаете что при конкретных  $k$  и  $m$  графиком функции  $y=kx+m$  является прямая линия.



Так же из курса школьной программы мы уже знаем, что  $k=tga$ , где  $a$ -угол наклона прямой к оси  $OX$ , а  $m$ -ордината точки, в которой прямая пересекается с осью  $OY$ . И если мы будем изменять значение  $k$ , то через одну точку пересечения  $m$  с осью  $OY$  проходит несколько различных прямых. Если же  $k$  зафиксировать, а  $m$  менять, то получим семейство параллельных прямых.



Теперь поближе познакомимся с линейными уравнениями. Линейные уравнения с двумя переменными называется уравнение вида  $ax+by+c=0$ . Если  $b \neq 0$ , то его можно привести к виду  $y = -a:b \cdot x - c:b$ , и, положив  $k = -a:b$  и  $m = -c:b$ , получить стандартный вид  $y=kx+m$ . Если же  $b=0$ , то уравнение приводится к виду  $x = -c:b$  и мы получаем прямую, параллельную оси  $OY$ .

Рассмотрим подробнее случай  $b \neq 0$ . Тогда, как было указано, мы можем привести уравнение к виду  $y=kx+m$ . Посмотрим, как меняется график функции  $y(x)$  при изменении коэффициентов  $k$  и  $m$ , то есть как функция  $y(x)$  зависит от параметров  $k$  и  $m$ .

Если  $k < 0$ , то функция убывает, если  $k = 0$ , то функция постоянна, и если  $k > 0$ , то функция возрастает (рис. 1).

Если  $m < 0$ , то точка пересечения с осью  $OY$  будет в нижней полуплоскости, если  $m = 0$ , то прямая пройдет через начало координат, и если  $m > 0$ , то график будет пересекаться с осью  $OY$  в верхней полуплоскости (рис. 2).

$k < 0$

$k = 0$

$k > 0$

$m < 0$

$m = 0$

$m > 0$

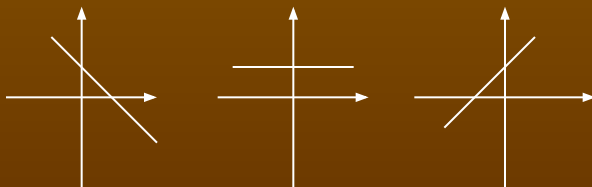


рис. 1

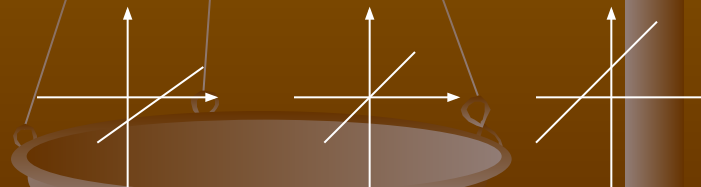
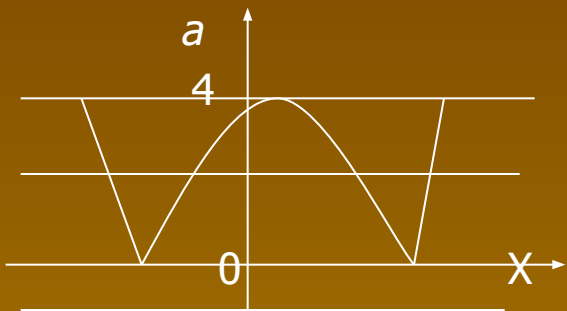


рис. 2

## ПРИМЕР №1

- Для каждого значения  $a$  определите число решений уравнения  $|x^2 - 2x - 3| = a$

- **Решение.** В этой задаче параметр уже выражен через переменную. Таким образом, надо просто аккуратно построить график данной функции.



- Количество решений уравнения при фиксированном  $a$  определяется числом точек пересечения построенного графика с прямыми  $y = a$ , проходящими параллельно оси  $X$ . Отсюда сразу следует, что при  $a > 4$  и при  $a = 0$  имеем два решения, при  $a = 4$  – три решения, при  $a \in (0; 4)$  – четыре решения и, наконец, при  $a < 0$  решений не существует.
- **Ответ.** Если  $a \in (4; +\infty)$ , то два решения;
- если  $a = 4$ , то три решения;
- если  $a \in (0; 4)$ , то четыре решения;
- если  $a = 0$ , то два решения;
- если  $a \in (-\infty; 0)$ , то нет решений.

## ПРИМЕР №2

Найдите все значения параметра  $p$ , при каждом из которых уравнение  $(x-p)(p(x-p)^2 - p - 1) = -1$  имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

**Решение.** Если  $p=0$ , то данное уравнение принимает вид  $x^3 = 1$ . Это уравнение имеет корни  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -1$ . Следовательно, в этом случае число положительных и число отрицательных корней одинаково, и такое  $p$  условию задачи не удовлетворяет.

Пусть  $p \neq 0$ . Обозначим  $z = (x-p)^2 \geq 0$ , тогда исходное уравнение принимает вид  $pz^2 - (p+z)z + 1 = 0$  (\*).

Корнями уравнения (\*) являются  $z_1 = 1$  и  $z_2 = \frac{1}{p}$ .

1) Если  $p < 0$ , то  $z < 0$ , что противоречит определению  $z$ , поэтому остается только  $z = 1$  и исходное уравнение имеет два корня:  $x_1 = p+1$  и  $x_2 = p-1$ . Легко видеть, что при  $-1 < p < 0$  имеем  $x_1 > 0$  и  $x_2 < 0$ ,

при  $p < -1$  имеем  $x_1 < 0$  и  $x_2 < 0$ ,

а при  $p = -1$  получаем  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -2$ .

Следовательно, ни при каком  $p < 0$  исходное уравнение не имеет положительных корней больше, чем отрицательных, то есть никакие значения  $p < 0$  условию не удовлетворяют.



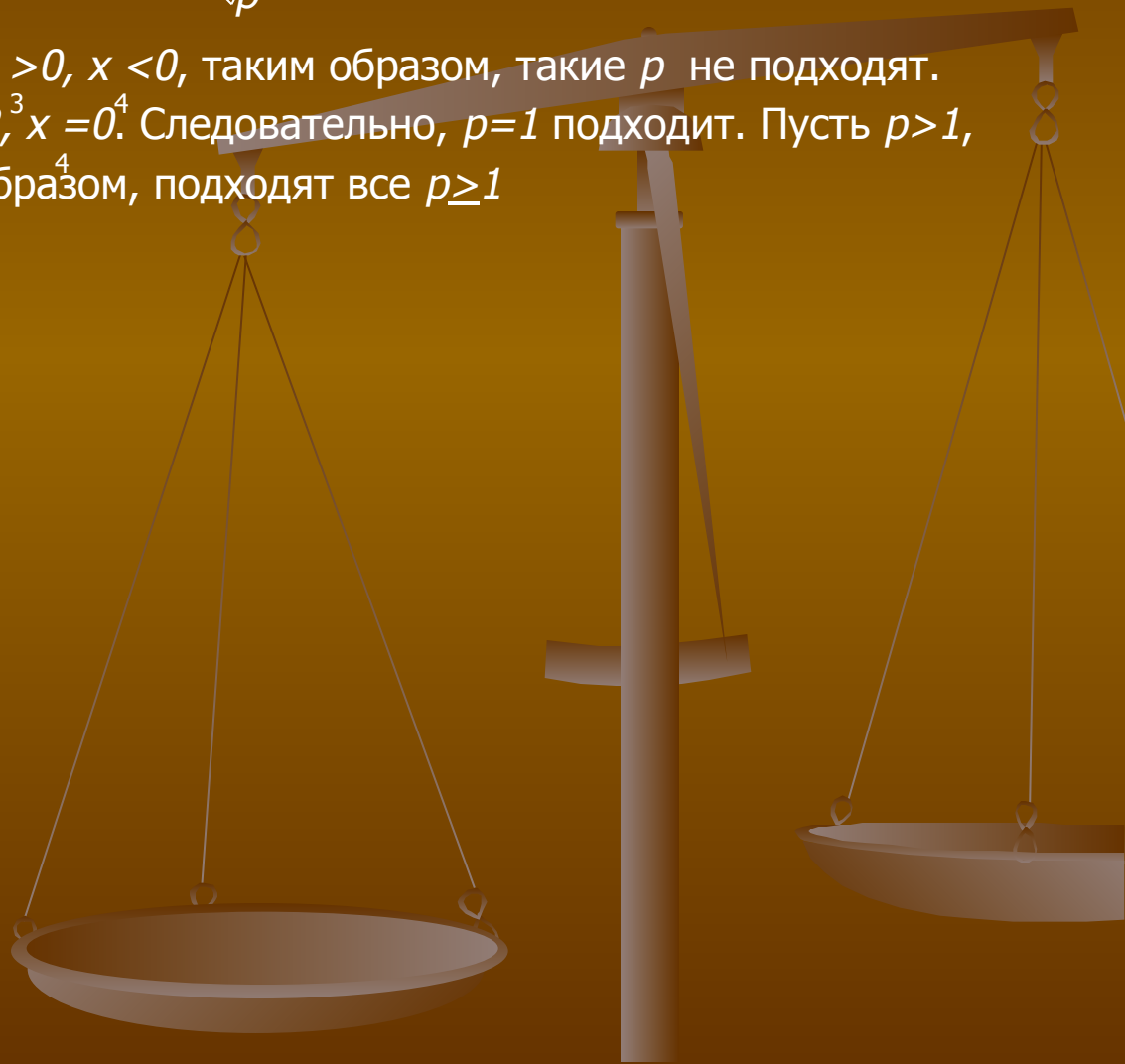
## ПРИМЕР №2

- 2) Если  $p > 0$ , то и  $z_2 > 0$  исходное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1 = p+1, \quad x_2 = p-1, \quad x_3 = p + \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad x_4 = p - \frac{1}{\sqrt{p}}$$

Пусть  $0 < p < 1$ , тогда  $x_1 > 0$ ,  $x_2 < 0$ ,  $x_3 > 0$ ,  $x_4 < 0$ , таким образом, такие  $p$  не подходят.  
Пусть  $p = 1$ . Тогда  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 0$ . Следовательно,  $p = 1$  подходит. Пусть  $p > 1$ , тогда  $x_i > 0$  при  $i = 1, 2, 3, 4$ . Таким образом, подходят все  $p \geq 1$

**Ответ.**  $p$  принадлежит  $[1; +\infty)$ .



## ПРИМЕР №3

Решите уравнение  $\log_a a^2 + \log_a (x^2 - 1) = \log_a (\sqrt{x-1})^3 + \log_a \sqrt{x+1}$ .

**Решение** ОДЗ:  $x > 1$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

$$\log_a a^2 + \log_a (x^2 - 1) = \log_a (\sqrt{x-1})^3 + \log_a \sqrt{x+1}$$

$$\log_a (a^2(x^2 - 1)) = \log_a ((\sqrt{x-1})^3 \sqrt{x+1}),$$

$$a^2(x^2 - 1) = (x-1) \sqrt{(x-1)(x+1)},$$

$$a^2(x-1)(x+1) = (x-1) \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

Так как  $x \neq -1$  и  $x \neq 1$ , сократим обе части уравнения на  $(x-1) \sqrt{(x-1)(x+1)}$

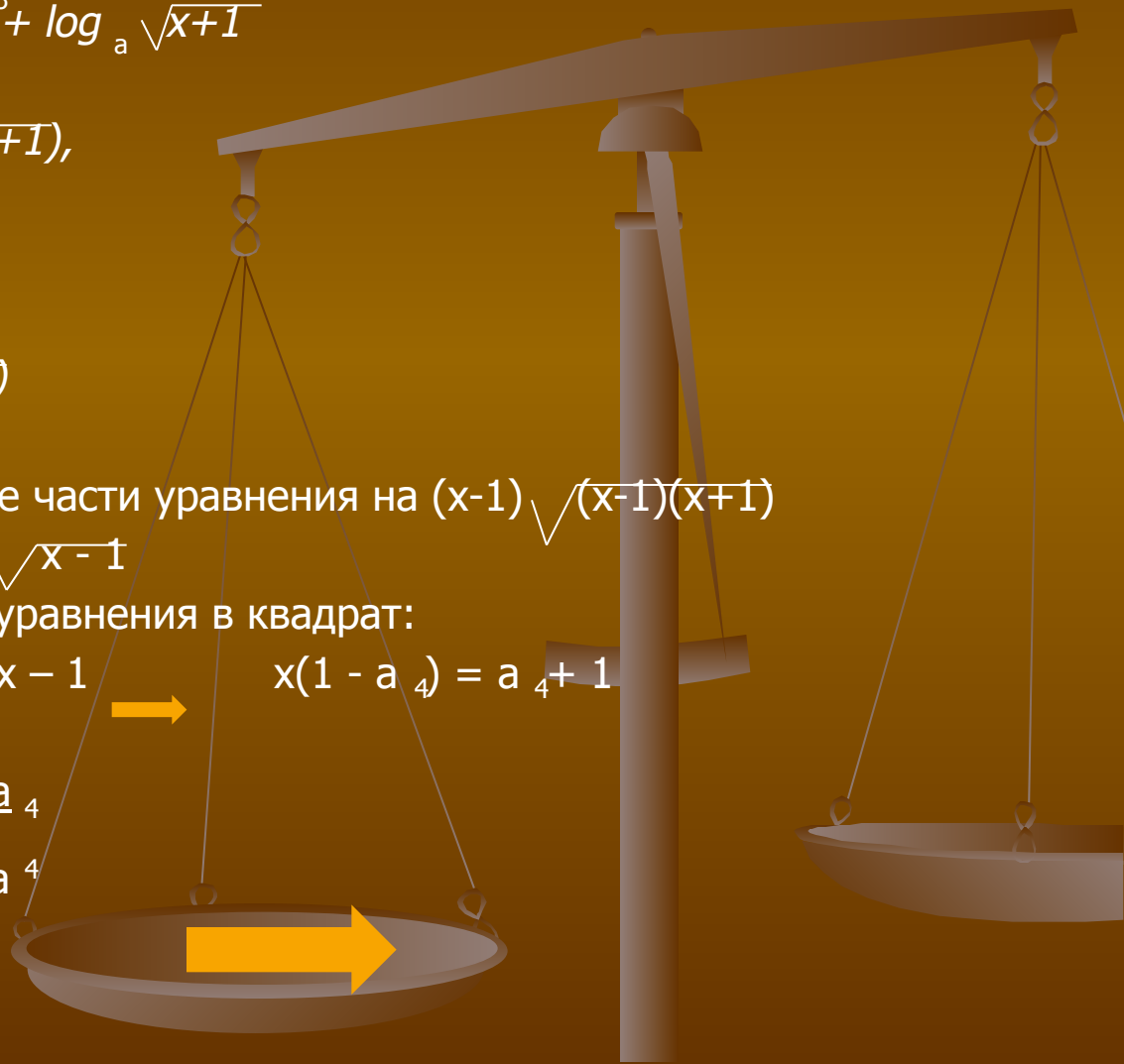
$$a^2 \sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$$

Возведём обе части полученного уравнения в квадрат:

$$a^4(x+1) = x-1 \quad \longrightarrow \quad a^4 x + a^4 = x-1 \quad \longrightarrow \quad x(1-a^4) = a^4+1$$

Так как  $a \neq -1$  и  $a \neq 1$ . то  $x = \frac{1+a^4}{1-a^4}$

$$1-a^4$$



### ПРИМЕР №3

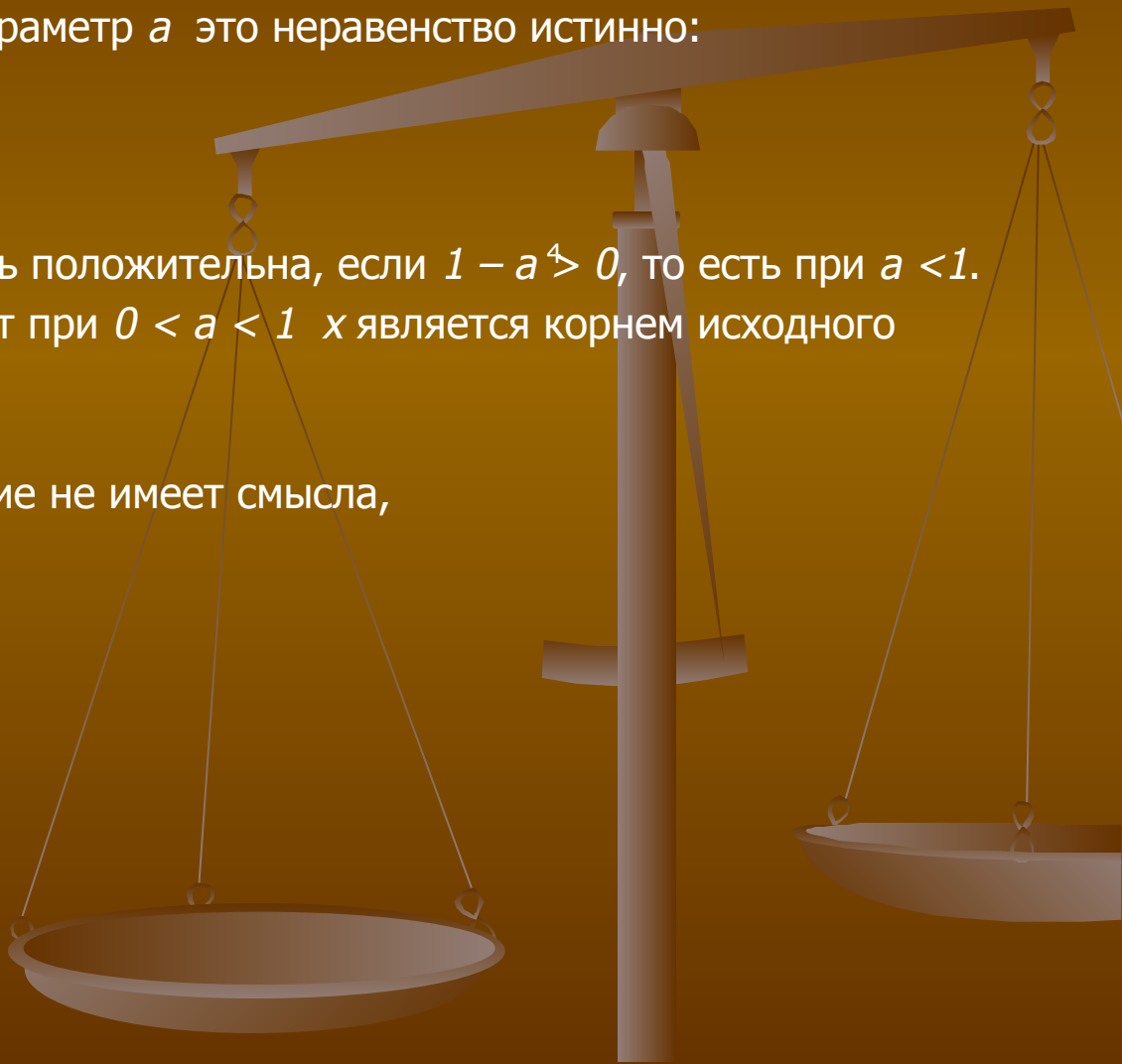
Для того чтобы значения  $x$  являлось решением уравнения, должно выполняться условие  $x > 1$ , то есть  $\frac{1+a^4}{1-a^4} > 0$

Выясним, при каких значениях параметр  $a$  это неравенство истинно:

$$\frac{1+a^4}{1-a^4} - 1 > 0, \quad \frac{2a^4}{1-a^4} > 0$$

Так как  $a > 0$ , то полученная дробь положительна, если  $1 - a^4 > 0$ , то есть при  $a < 1$ .  
Итак, при  $0 < a < 1$ ,  $x > 1$ , значит при  $0 < a < 1$   $x$  является корнем исходного уравнения.

**Ответ.** При  $a < 0$ ,  $a = 1$  уравнение не имеет смысла,  
при  $a > 1$  решений нет,  
при  $0 < a < 1$   $x = \frac{1+a^4}{1-a^4}$



## ПРИМЕР №4

Найдите все значения параметра  $b$ , при которых система уравнений имеет два действительных решения.

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x + 2x \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

**Решение.** Преобразуем исходную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x + 2x \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = 4b + 4 - (x-1)^2 \\ (x-1)^2 = 1 - y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 + 4y + 4b + 3 = 0 \\ (x-1)^2 = 1 - y^2 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение последней системы. Так как  $(x-1)^2 \geq 0$ , то значение переменной  $y$  должно лежать на отрезке  $[-1; 1]$ .

Путём подстановки в систему проверяем, что при  $y = \pm 1$  исходная система не имеет двух действительных решений, и условие на переменную  $y$  выглядит следующим образом:  $y$  принадлежит  $(-1; 1)$ . (\*)

Решения первого уравнения при  $b \leq \frac{1}{4}$  имеют вид  $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1 - 4b}$

А при  $b > \frac{1}{4}$  не существуют. Имеем  $y_{1,2} > 2$ , то есть условие (\*) не выполняется.

Таким образом, чтобы существовало решение системы, необходимо следующее:



## ПРИМЕР №4

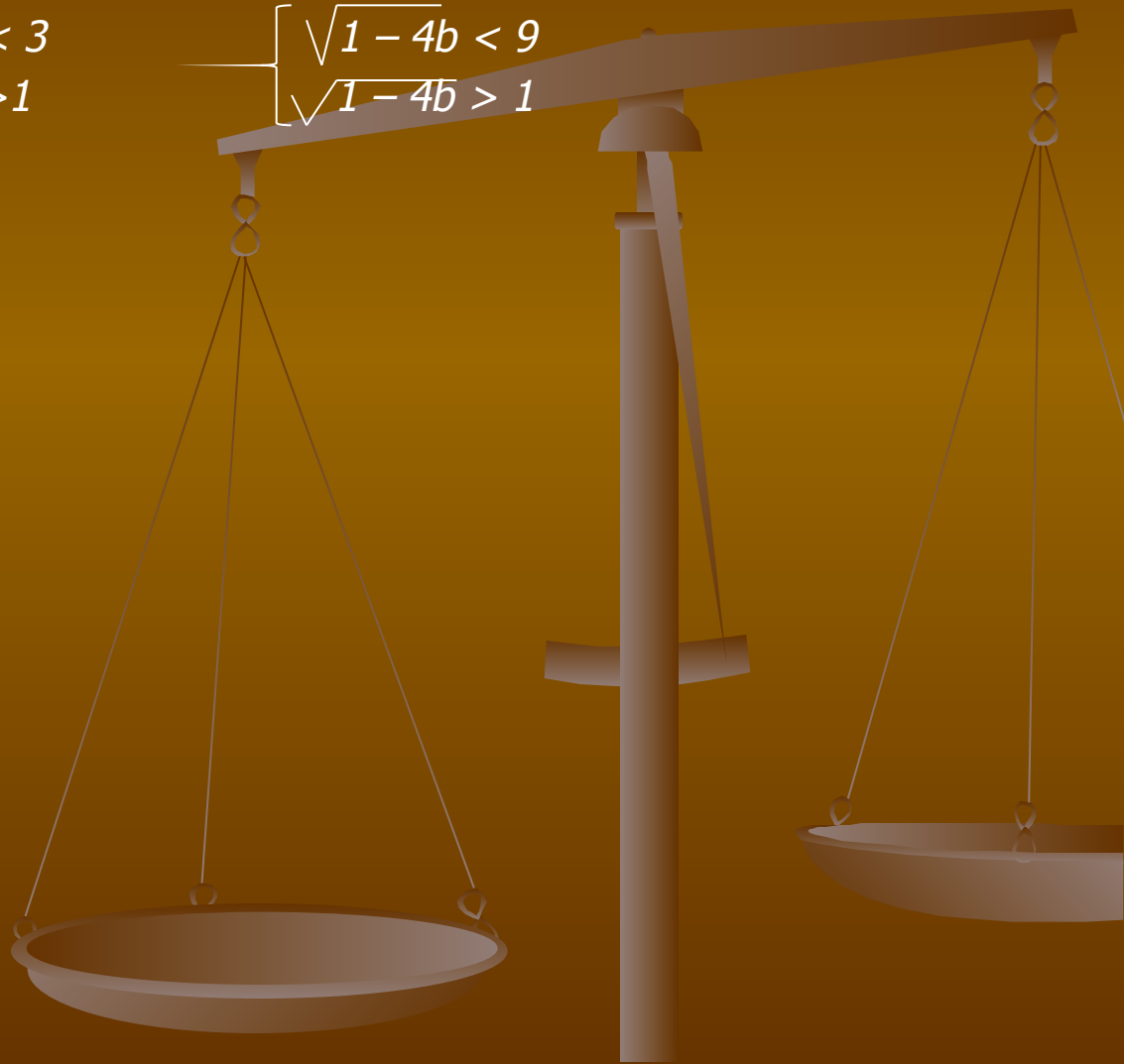
$$-1 < 2 - \sqrt{1-4b} < 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - \sqrt{1-4b} < -1 \\ 2 - \sqrt{1-4b} < 1 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-4b} < 3 \\ \sqrt{1-4b} > 1 \end{array} \right.$$

$b$  принадлежит  $(-2;0)$

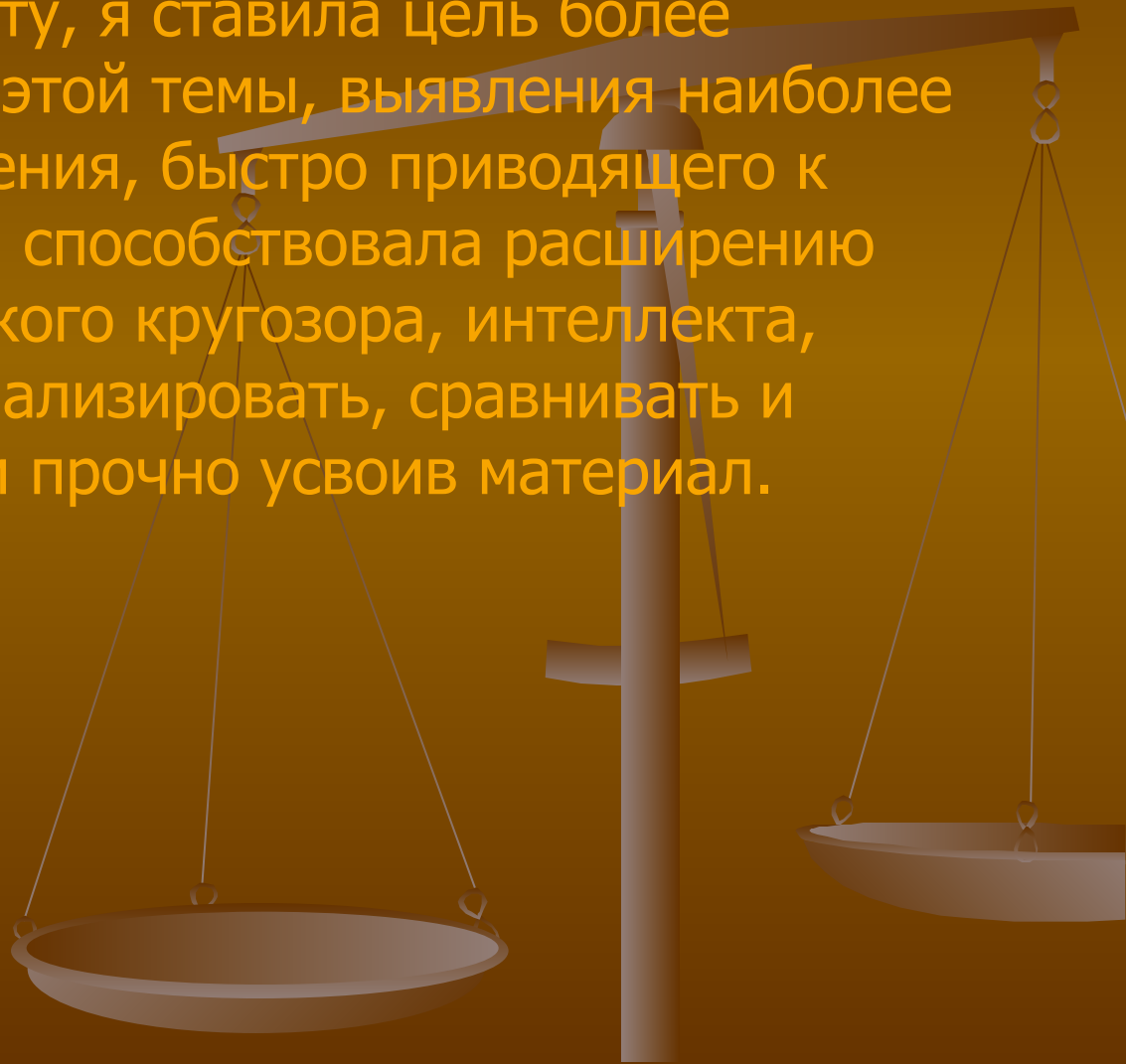
Ответ.  $b$  принадлежит  $(-2;0)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1-4b} < 3 \\ \sqrt{1-4b} > 1 \end{array} \right.$$



# Заключение

- Готовя данную работу, я ставила цель более глубокого изучения этой темы, выявления наиболее рационального решения, быстро приводящего к ответу. И работая, я способствовала расширению своего математического кругозора, интеллекта, развитию умения анализировать, сравнивать и обобщать, глубоко и прочно усвоив материал.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Еженедельная учебно-методическая газета «Математика» №36/2001; №4/2002; №22/2002; №23/2002; №33/2002.
2. ОЛВЗМШ МГУ «Задачи с параметрами»
3. «Система дополнительных занятий по математике 11 класс» С.А. Агалоков

