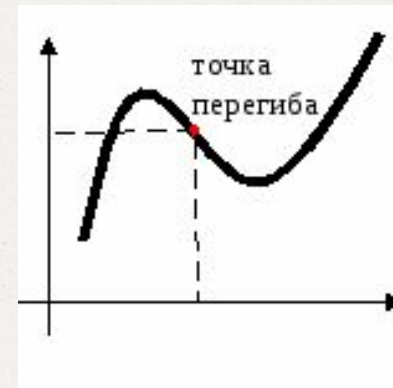


ТОЧКИ ПЕРЕГИБА. НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ.

Автор: преподаватель
ГАПОУ «ЛНТ» Шаммасова
А.А.

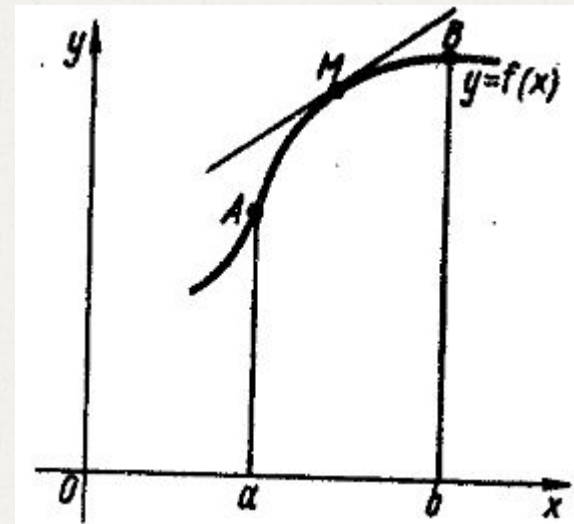
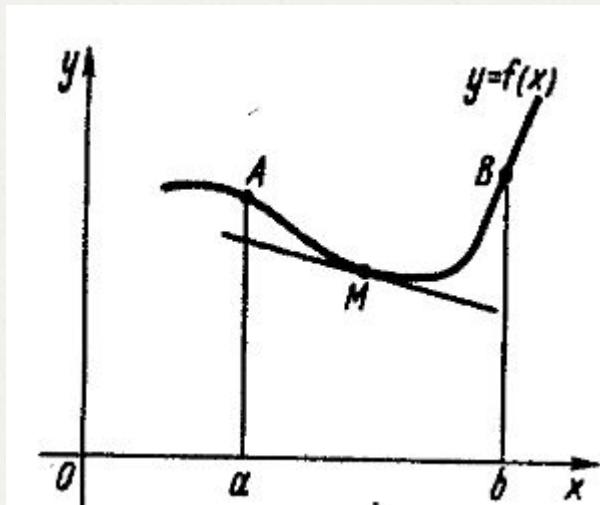


Цель урока:



- 0 Формирование представлений о направлении выпуклости графика функции в зависимости от знака её второй производной.
- 0 Обеспечение усвоения понятия точки перегиба.
- 0 Формирование представлений о правиле нахождения точек перегиба графика функции.
- 0 Формирование умений исследовать функцию на направление выпуклости и определять точки перегиба.

Кривая $y=f(x)$ называется **выпуклой вниз** (**выпуклой вверх**) в промежутке $a < x < b$, если она лежит выше (ниже) касательной в любой точке этого промежутка.



Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются **промежутками выпуклости графика функции**.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции $y=f(x)$, характеризуется знаком ее второй производной:

Если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая **выпукла вниз** в этом промежутке. Если же $f''(x) < 0$, то кривая **выпукла вверх** в этом промежутке.

Пример 1. Исследовать на направление выпуклости кривую $f(x)=1/x$ в точках $x_1=-2$ и $x_2=1$.

Находим:

$$f'(x) = -1/x^2$$

$$f''(x) = 2/x^3$$

$$f''(-2) = 2/(-2)^3 < 0$$

$$f''(1) = 2/1^3 > 0$$

Таким образом, в точке $x=-2$ кривая выпукла вверх, а в точке $x=1$ – выпукла вниз.

Пример 2. Найти промежутки выпуклости кривых:

а) $f(x)=x^3$

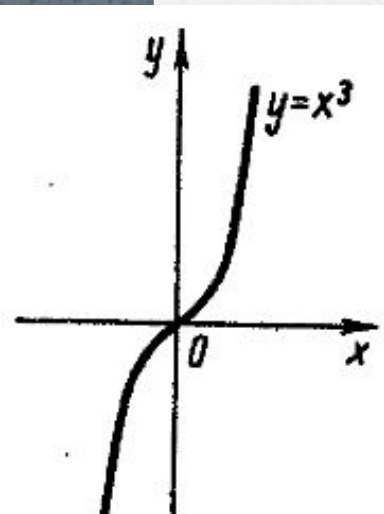
Находим:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

В промежутке $-\infty < x < 0$ имеем $f''(x) < 0$, т.е. в этом промежутке кривая **выпукла вверх**.

В промежутке $0 < x < +\infty$ имеем $f''(x) > 0$, т.е. в этом промежутке кривая **выпукла вниз**.



Пример 2. Найти промежутки выпуклости кривых:

б) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x - 4$

Находим:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$$

В промежутках $-\infty < x < 0$ и $1 < x < +\infty$ имеем **$f''(x) > 0$** , т.е. в этом промежутке кривая **выпукла вниз**.

В промежутке $0 < x < 1$ имеем **$f''(x) < 0$** , т.е. в этом промежутке кривая **выпукла вверх**.

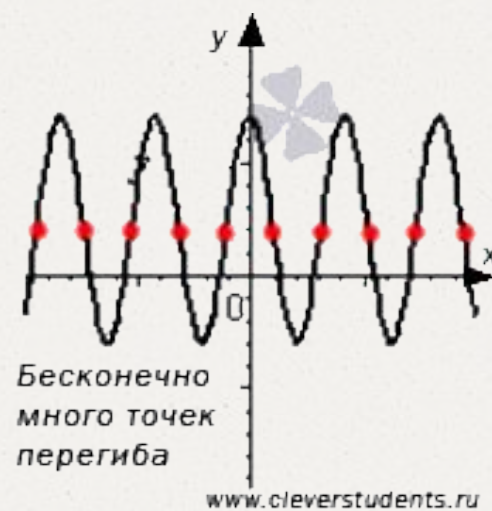
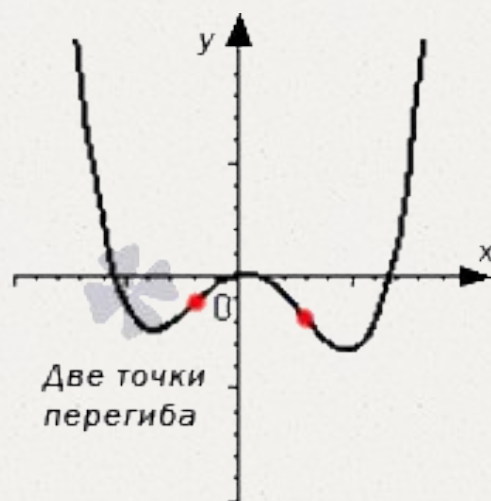
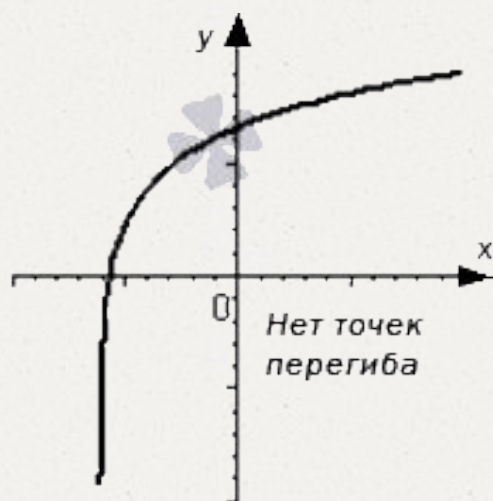
Точка графика функции $y=f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется **точкой перегиба**.

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции $y=f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)=0$ или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку x_0 $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y=f(x)$

- I. Найти вторую производную $f''(x)$.*
- II. Найти критические точки функции $y=f(x)$, в которых $f''(x)=0$ или терпит разрыв.*
- III. Исследовать знак $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 – абсцисса точки перегиба функции.*
- IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.*



Пример 3. Найти точки перегиба кривых:

а) $f(x) = 6x^2 - x^3$

Находим:

$$f'(x) = 12x - 3x^2$$

$$f''(x) = 12 - 6x$$

$$f''(x) = 0 \quad x = 2 - \text{критическая точка}$$

В промежутке $-\infty < x < 2$ $f''(x) > 0$, а в промежутке $2 < x < +\infty$ имеем $f''(x) < 0$, тогда при $x = 2$ кривая имеет точку перегиба.

Найдем ординату этой точки:

$$f(2) = 16$$

Следовательно, $(2; 16)$ – точка перегиба.

Пример 3. Найти точки перегиба кривых:

б) $f(x) = x + \sqrt[3]{x^5} - 2$

Находим: $f'(x) = 1 + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ $f''(x) = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)=0$ $x=0$ – критическая точка, в которой вторая производная терпит разрыв.

В промежутке $-\infty < x < 0$ $f'(x) < 0$, а в промежутке $0 < x < +\infty$ имеем $f'(x) > 0$, тогда при $x=0$ кривая имеет точку перегиба $(0; -2)$.