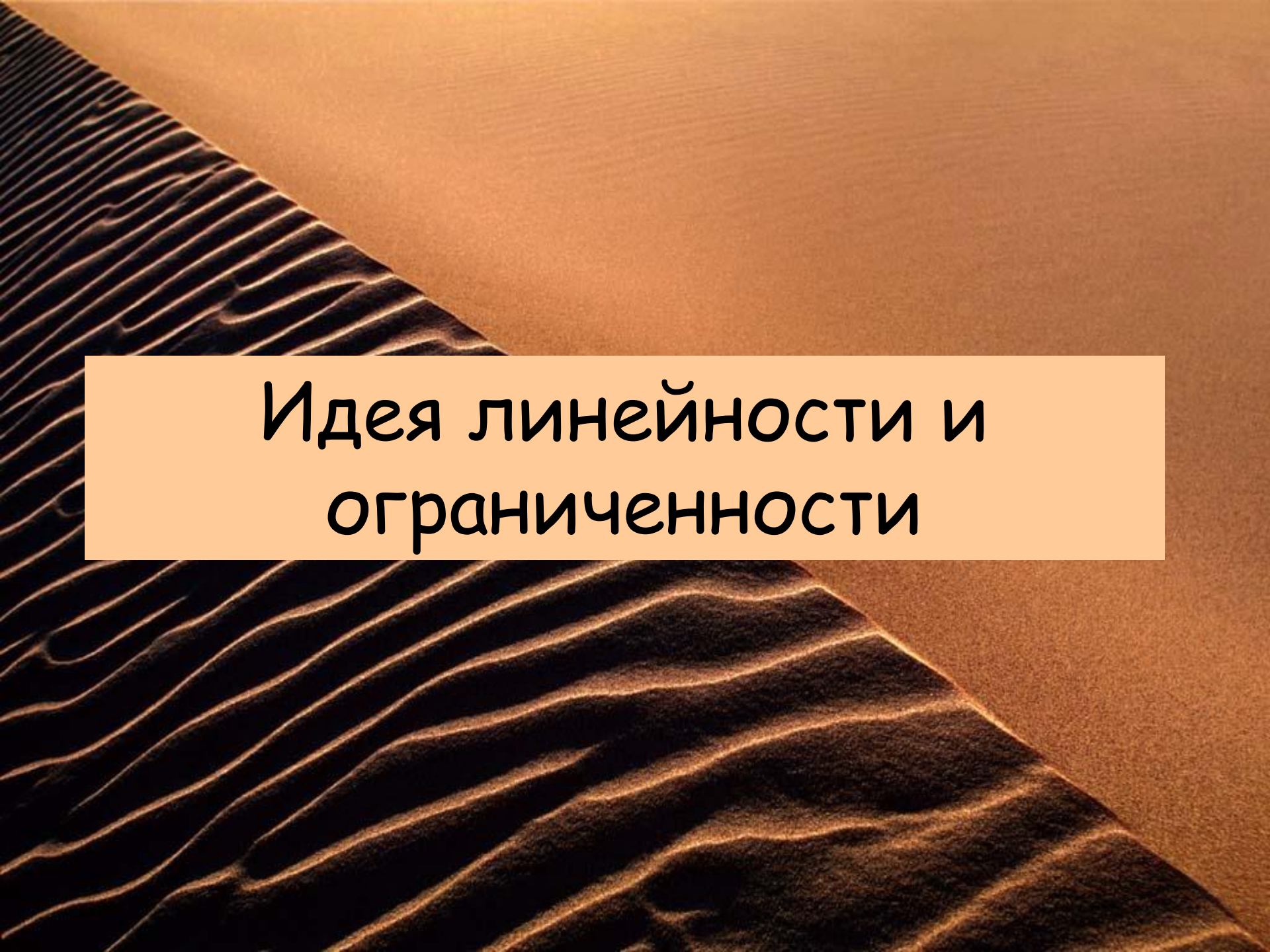


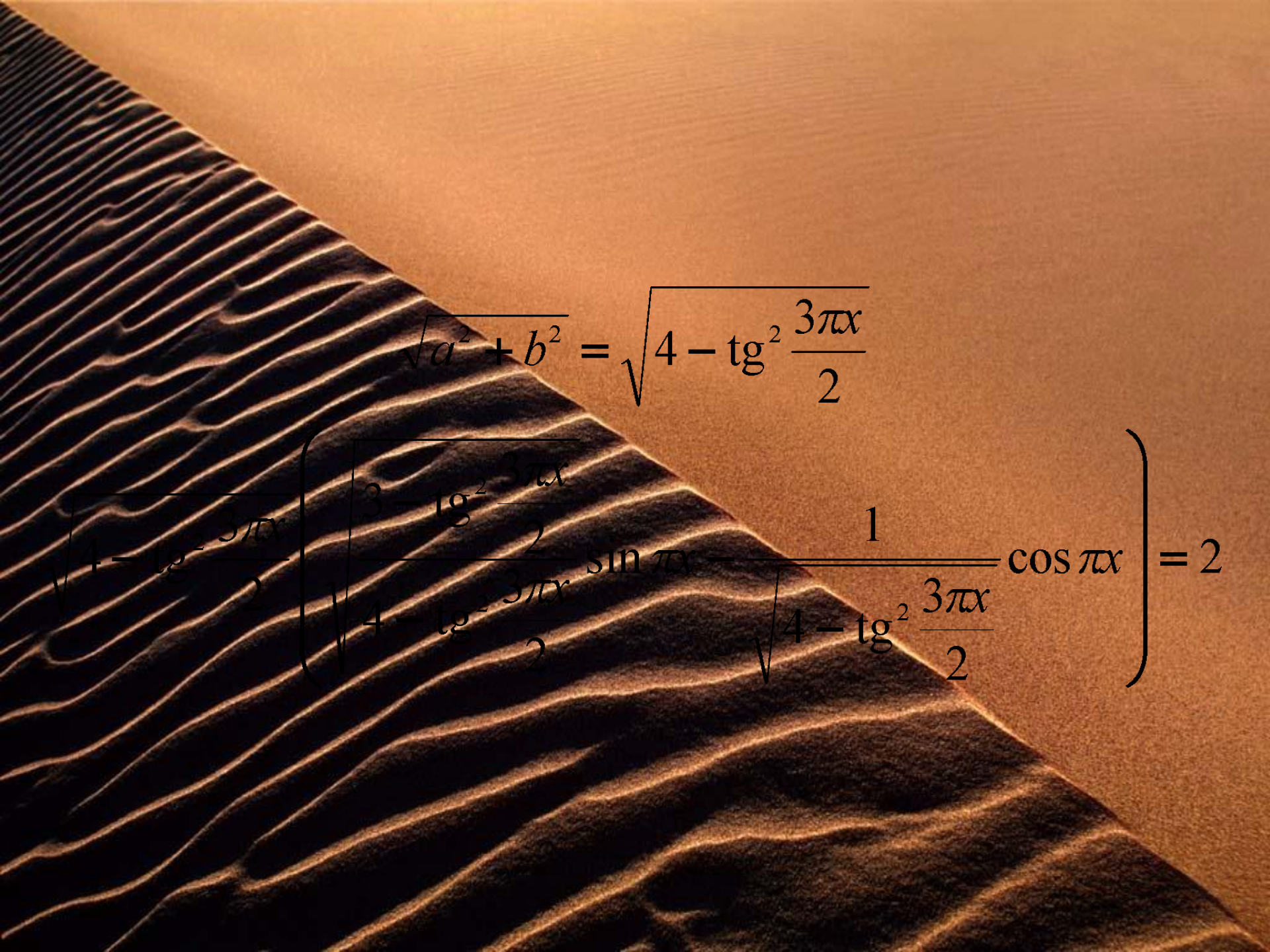
Идея линейности и ограниченности

Задание 1.
Решить уравнение

$$\sqrt{3-tg^2\frac{3\pi x}{2}}\sin\pi x-\cos\pi x=2$$

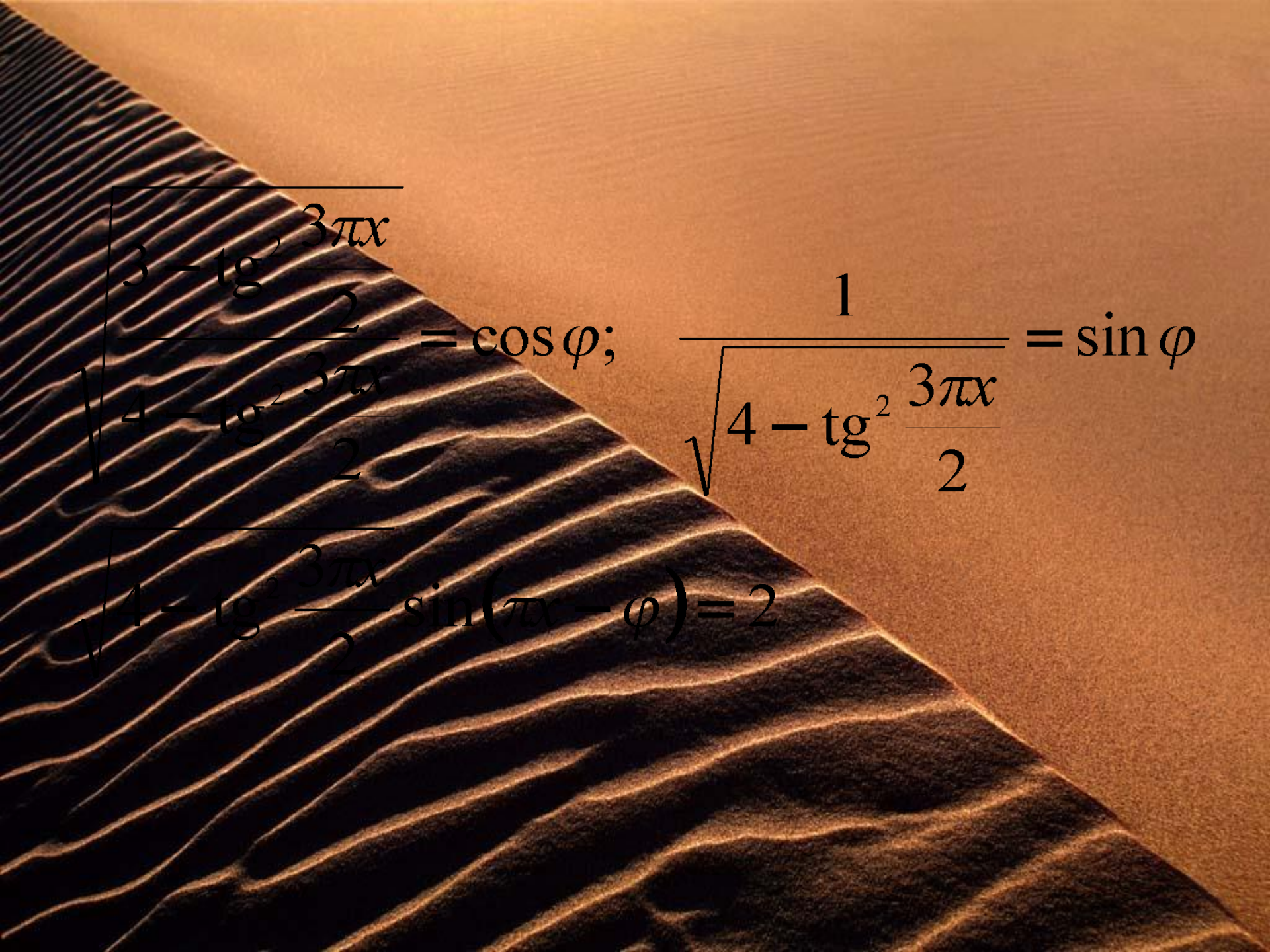
Линейное уравнение

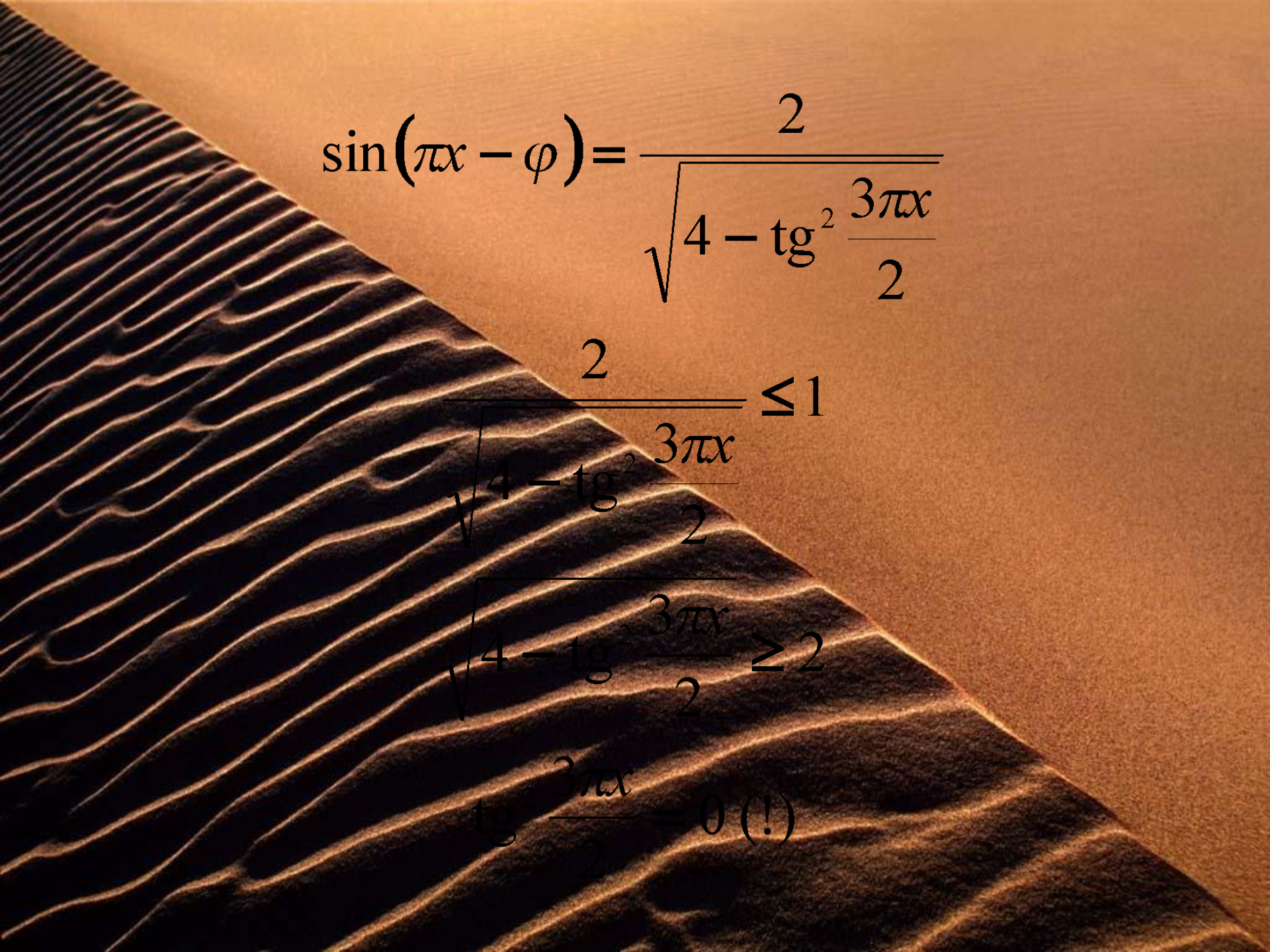
$$a=\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}};\quad b=-1;\quad c=2$$



$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}$$

$$\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}\left(\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}\sin\pi x-\frac{1}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}\cos\pi x\right)=2$$


$\sqrt{\frac{3-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}=\cos\varphi;\quad \frac{1}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}=\sin\varphi$
$\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}\sin(\pi x-\varphi)=2$



$$\sin(\pi x-\varphi)=\frac{2}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}\le 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}\ge 2$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi x}{2}=0\ (!)$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\pi x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{2}{3} + 2k, \; k \in \mathbf{Z}$$

Задание 2.
Решить уравнение

$$\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$$

Используя неравенство Коши, имеем:

$$\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y = 2\frac{\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y}{2} +$$

$$+ 2\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y \geq 2\sqrt{\mathrm{tg}^4 x \cdot \mathrm{tg}^4 y} + 2\mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y =$$

$$= 2(\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{tg}^2 y + \mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y) = 4\frac{\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{tg}^2 y + \mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y}{2} \geq$$

$$\geq 4\sqrt{\mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{tg}^2 y \cdot \mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{ctg}^2 y} = 4.$$

Поэтому $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y \geq 4.$

С другой стороны, очевидно

$$3 + \sin^2(x+y) \leq 4.$$

Данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда обе части равны 4.

Поэтому данное уравнение равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 4, & (*) \\ 3 + \sin^2(x+y) = 4, & (**) \end{cases}$$

Из уравнения (**) имеем

$$\sin^2(x+y)=1 \quad \text{или} \quad \cos(x+y)=0,$$

откуда

$$x+y=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in Z \quad \text{или} \quad y=\frac{\pi}{2}-x+\pi k, \quad k\in Z.$$

Это значение у подставим в уравнение (*).

Получим

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x = 4$$

или

$$\left(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x\right)^2 = 4,$$

отсюда, так как

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x > 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2.$$

Решая это уравнение, найдём $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Тогда $\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right) + \pi k = \frac{\pi}{4} + \pi\left(k - \frac{n}{2}\right).$

Итак, данное уравнение имеет такие решения:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

и

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi\left(k - \frac{n}{2}\right), \quad n, k \in Z$$