



Уравнения, неравенства и их системы в школьном курсе математики

Линейные неравенства

Линейным неравенством называют неравенство, в котором неизвестное стоит только в **первой** степени.

Например, $x + 8 < 15$

Решением неравенства является любое значение переменной, при котором это неравенство будет верно.

"Решить неравенство" означает, что надо найти множество всех его решений. Существуют различные **методы решения неравенств**. Для **решения неравенства** пользуются числовой прямой, которая бесконечна.

Решение неравенства

1. Чтобы решить неравенство, нужно чтобы в левой части осталось только неизвестное в первой степени с коэффициентом «1».
2. При решении линейных неравенств используют правило переноса и правило деления неравенства на число.
3. При переносе из левой части в правую (и наоборот) член неравенства меняет свой знак на **противоположный**.

Используем правило переноса в решении нашего неравенства:

$$X + 8 < 15$$

$$X < 15 - 8$$

$$X < 7$$

Решение неравенства

Итак, при решении нашего неравенства был получен ответ « $x < 7$ »

Для того, чтобы понять, что получается при решении неравенства, нам нужно нарисовать числовую ось для данного неравенства. Но перед этим нужно вспомнить, какие знаки используются в неравенствах.

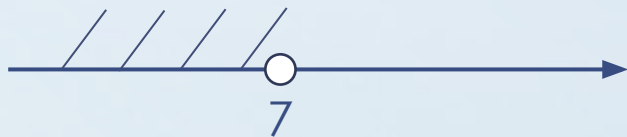
Таблица знаков.		
НЕРАВЕНСТВО	СТРОГОЕ	НЕ СТРОГОЕ
ЗНАК	$> <$	$\geq \leq$
ТОЧКА	0	$\bullet$
СКОБКИ	$(...)$	$[...]$

Правила нанесения числа на числовую ось

При нанесении числа на числовую ось соблюдаются следующие правила:

- если неравенство строгое, то число отмечается как «пустая» точка. число не входит в решение неравенства Это означает, что число не входит в область решения;
- если неравенство нестрогое, то число отмечается как «заполненная» точка. число входит в решение неравенства Это означает, что число входит в область решения.

Числовая ось для нашего неравенства будет выглядеть следующим образом:

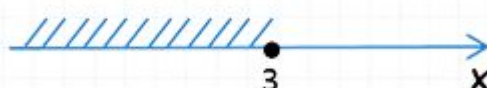


или мы можем записать
промежуток $(-\infty; 7)$

Умножение и делении неравенств

При умножении или делении неравенства на число, на это число умножается (делится) и левая, и правая часть.

- Если неравенство умножается (делится) на **положительное число**, то знак самого неравенства остаётся **прежним**.
- Если неравенство умножается (делится) на **отрицательное число**, то знак самого неравенства меняется на **противоположный**.

$$\begin{aligned} -3x &\geq -9 \\ -3x &\geq -9 \quad | :(-3) \\ -3x : (-3) &\leq -9 : (-3) \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$


Ответ: $x \leq 3$

Решение уравнений

Можно выделить следующие этапы при изучении темы "Квадратные уравнения":

- I этап - "Решение неполных квадратных уравнений".
- II этап - "Решение полных квадратных уравнений".

На первом этапе рассматриваются неполные квадратные уравнения. Так как сначала математики научились решать неполные квадратные уравнения, такие как:

$$ax^2=0$$

$$ax^2+c=0$$

$$ax^2+bx=0$$

Решение неполных квадратных уравнений

1) $ax^2=0$ Уравнения такого вида решаются по алгоритму:

1) найти x^2 ;

2) найти x .

Пример

$$5x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

2) $ax^2+c=0$ Уравнения данного вида решаются по алгоритму:

1) перенести слагаемые в правую часть;

2) найти все числа, квадраты которых

равны числу c .

Пример

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -5$$

3) $ax^2+bx=0$ Уравнения такого вида решаются так:

1) вынести общий множитель за скобки;

2) найти x_1 , x_2 .

Пример

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$\underline{x = 0} \text{ или } x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Корни неполного квадратного уравнения

Итак, данные примеры показывают, как решаются неполные квадратные уравнения:

- 1) если уравнение имеет вид **$ax^2=0$** , то оно имеет один корень $x = 0$;
- 2) если уравнение имеет вид **$ax^2+bx=0$** , то используется метод разложения на множители. В итоге получается два корня.
- 3) если уравнение имеет вид **$ax^2+c=0$** , то его преобразуют к виду: $ax^2 = -c$ и далее $x^2 = \dots$

Таким образом, неполное квадратное уравнение может иметь два корня, один корень, ни одного корня.

Полное квадратное уравнение

Это уравнение имеет следующий вид: $ax^2+bx+c=0$

Как правило, его корни вычисляются с помощью дискриминанта. Его формула следующая:

$D = b^2 - 4ac$, где b – коэффициент при x , a – при x^2 , c – число.

Корни вычисляются по следующей формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней;

Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных корня, которые находятся по формуле: $x = \frac{-b}{2a}$

Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня, которые находятся по вышеуказанной формуле

Решение систем уравнений

Системой уравнений называют два уравнения с двумя неизвестными (чаще всего неизвестные в них называют «x» и «y»), которые объединены в общую систему фигурной скобкой.

Например,
$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Существуют три способа решения систем уравнений: графический, способ подстановки, метод алгебраического сложения, рассмотрим два основных – способ подстановки и метод алгебраического сложения.

Способ подстановки. 1 шаг.

1. Выражение неизвестной переменной из одного уравнения системы.

Чтобы выразить неизвестное, нужно выполнить два условия:

- перенести неизвестное, которое хотим выразить, в левую часть уравнения;
- разделить и левую и правую часть уравнения на нужное число так, чтобы коэффициент при неизвестном стал равным единице.

Выразим переменную «x» из первого уравнения нашей системы:

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 5y \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Способ подстановки. 2 шаг.

Теперь, вместо «x» подставим во второе уравнение полученное выражение « $x = 7 - 5y$ » из первого уравнения.

$$\begin{cases} x = 7 - 5y \\ 3(7 - 5y) - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 5y \\ 21 - 15y - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 5y \\ -17y = -17 \end{cases}$$

2. Подставив вместо «x» выражение « $(7 - 5y)$ » во второе уравнение, мы получили обычное линейное уравнение с одним неизвестным «y». Решим его:

$$\begin{aligned} -17y &= -17 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

3. Вернемся к системе и подставим известные нам переменные

$$\begin{cases} x = 7 - 5y \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 5 * 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Метод алгебраического сложения

Рассмотрим другой способ решения системы уравнений. Метод называется способ сложения. Вернемся к нашей системе уравнений еще раз.

По правилам математики уравнения системы можно складывать. Наша задача в том, чтобы сложив исходные уравнения, получить такое уравнение, в котором останется только одно неизвестное.

При сложения уравнений системы левая часть первого уравнения полностью складывается с левой частью второго уравнения, а правая часть полностью складывается с правой частью.

В качестве примера возьмем уже известную нам систему.

Метод сложения

- $$+ \begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x + 3y = 11$$

Как можно увидеть, при простом сложении двух уравнений системы, получилось уравнение с двумя переменными. Для того, чтобы решить систему методом алгебраического сложения необходимо сделать так, чтобы одна из переменных взаимноуничтожилась, для этого умножим первое уравнение на «-3» и получим:

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow{/* (-3)} + \begin{cases} -3x - 15y = -21 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -3x - 15y + 3x - 2y = -21 + 4 \\ -17y = -17 \end{matrix} \Rightarrow y = 1$$

Вернемся к системе и подставим известные нам переменные

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5 * 1 = 7 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: $x=2$, $y=1$

Таким образом, мы рассмотрели два основных способа решения систем уравнений. Теперь рассмотрим решение систем неравенств.

Решение систем неравенств.

Системой неравенств называют два или более неравенства, которые объединены фигурной скобкой.

Рассмотрим решение двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Система № 1.

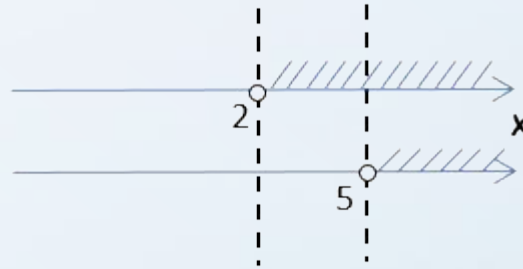
Чтобы решить систему неравенств нужно:

- 1) решить отдельно каждое неравенство;
- 2) сравнить полученные решения каждого неравенства и получить общий ответ системы

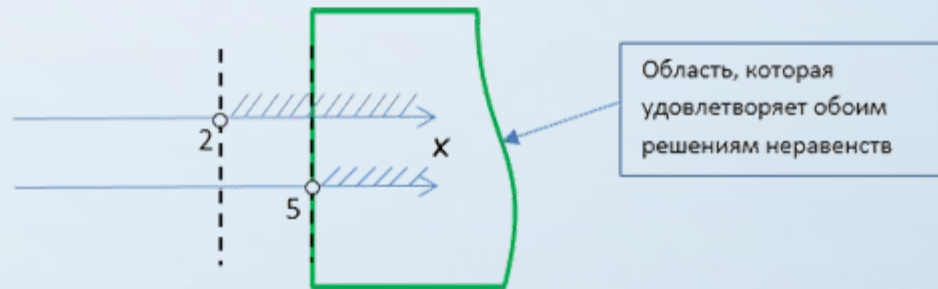
Изобразим решение каждого неравенства на координатной прямой



Проведем прямые через числовые точки на осях.



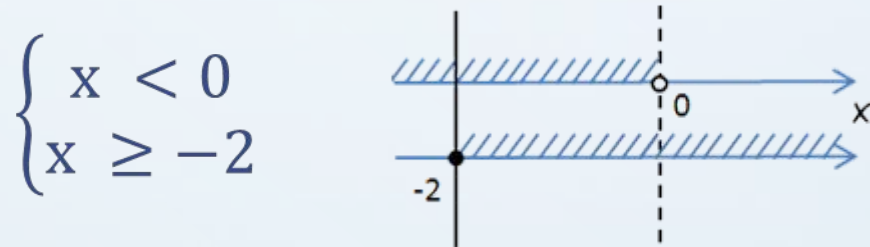
Для определения ответа найдем те области решения, которые удовлетворяют ответам обоим неравенствам. Другими словами, те области, где в обоих случаях области решений заштрихованы.



Исходя из проведенного анализа, запишем ответ $x > 5$

Система № 2.

Нарисуем числовые оси для каждого неравенства и отметим на них решения. Проведем через каждое отмеченное число на осях прямую по правилам, описанным ранее.



Выберем те области решений, которые удовлетворяют обоим неравенствам.



Когда область решений находится между двумя числами, принято записывать ответ с помощью двойного неравенства.

Ответ: $-2 \leq x < 0$

Спасибо за
внимание!