

1

2

3

4

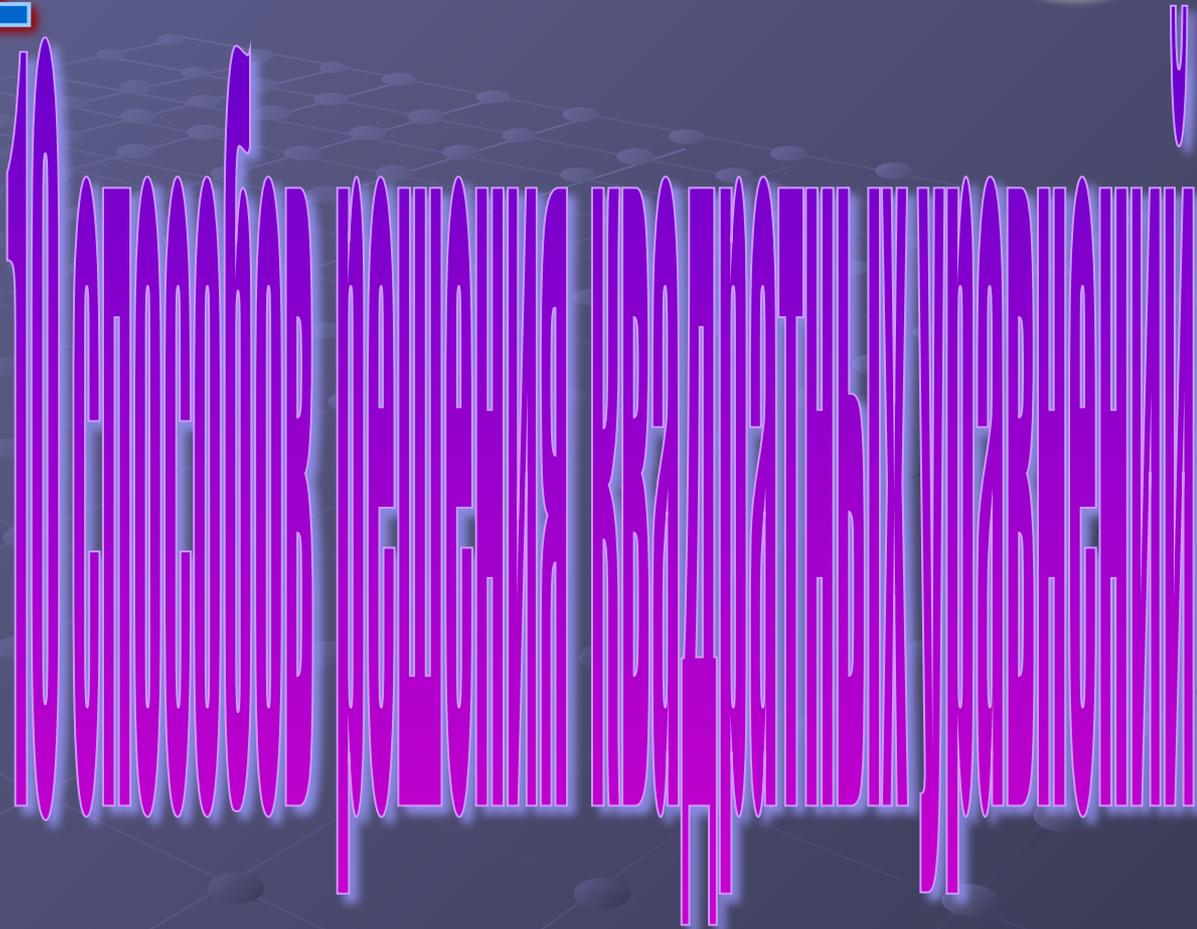
5

6

7

9

8



История развития квадратных уравнений.

- Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне:

$$x^2 + x = 3/4$$

$$x^2 - x = 14,5$$

- Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения.

Отсюда уравнение:

$$(10+x)(10-x) = 96$$

или же:

$$100 - x^2 = 96$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

Решение $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

- Квадратные уравнения в Индии.

$$ax^2 + bx = c, \quad a > 0. \quad (1)$$

Вот одна из задач

Задача 13.

«Обезьянок резвых стая
Власть поевши, развлекал
Их в квадрате часть восьм
На поляне забавлялась.

II в. Бхаскары.

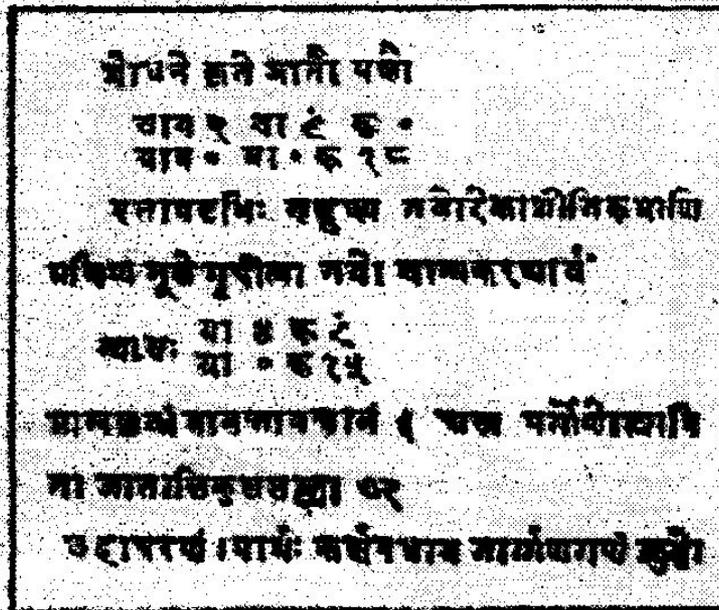


Рис. 3. Часть страницы из алгебры Бхаскары «Видиса Ганита» (вычисление корней)

• Квадратные уравнения у ал – Хорезми.

1) «Квадраты равны корнями», т.е. $ax^2 + c = bx$.

2) «Квадраты равны числу», т.е. $ax^2 = c$.

3) «Корни равны числу», т.е. $ax = c$.

4) «Квадраты и числа равны корням», т.е. $ax^2 + c = bx$.

5) «Квадраты и корни равны числу», т.е. $ax^2 + bx = c$.

6) «Корни и числа равны квадратам», т.е. $bx + c = ax^2$.

- Квадратные уравнения в Европе XIII - XVII вв.

$$x^2 + bx = c,$$

при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов b , c было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

- О теореме Виета.

«Если $B + D$, умноженное на $A - A^2$, равно BD , то A равно B и равно D ».

На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает: если имеет место

$$(a + b)x - x^2 = ab,$$

т.е.

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

то

$$x_1 = a, \quad x_2 = b.$$

Способы решения квадратных уравнений.

- 1. СПОСОБ: Разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$. Разложим левую часть на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, а также при $x = -12$. Это означает, что число 2 и -12 являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

- 2. СПОСОБ: *Метод выделения полного квадрата.*

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$. Выделим в левой части полный квадрат.

Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x , а второе - удвоенное произведение x на 3 . По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 32 , так как

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 32 = (x + 3)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 32 . Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 32 - 32 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, \quad (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, $x_1 = 1$, или $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

- 3. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений по формуле.

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

на $4a$ и последовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- 4. СПОСОБ: Решение уравнений с использованием теоремы Виета.

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + px + c = 0. \quad (1)$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$$\begin{aligned}x_1 x_2 &= q, \\x_1 + x_2 &= -p\end{aligned}$$

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, так как $q = 2 > 0$ и $p = -3 < 0$;
 $x^2 + 8x + 7 = 0$; $x_1 = -7$ и $x_2 = -1$, так как $q = 7 > 0$ и $p = 8 > 0$.

б) $x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = -5$ и $x_2 = 1$, так как $q = -5 < 0$ и $p = 4 > 0$;
 $x^2 - 8x - 9 = 0$; $x_1 = 9$ и $x_2 = -1$, так как $q = -9 < 0$ и $p = -8 < 0$.

- **5. СПОСОБ:** Решение уравнений способом «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Умножая обе его части на a , получаем уравнение

$$a^2x^2 + abx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$$y^2 + by + ac = 0,$$

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_2 = y_2/a$.

• Пример.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 6/2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2,5 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $2,5; 3$.

- 6. СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

А. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) Если, $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то $x_1 = 1$,
 $x_2 = c/a$.

Доказательство. Разделим обе части уравнения на $a \neq 0$, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -b/a,$$

$$x_1 x_2 = 1 \cdot c/a.$$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$x_1 + x_2 = -a + b/a = -1 - c/a,$$

$$x_1 x_2 = -1 \cdot (-c/a),$$

т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = c/a$, что и требовалось доказать.

- Б. Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

можно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \quad (2)$$

В. Приведенное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ или } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (3)$$

- 7. СПОСОБ: Графическое решение квадратного уравнения.

Если в уравнении

$$x^2 + px + q = 0$$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$$x^2 = -px - q.$$

Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = -px - q$.

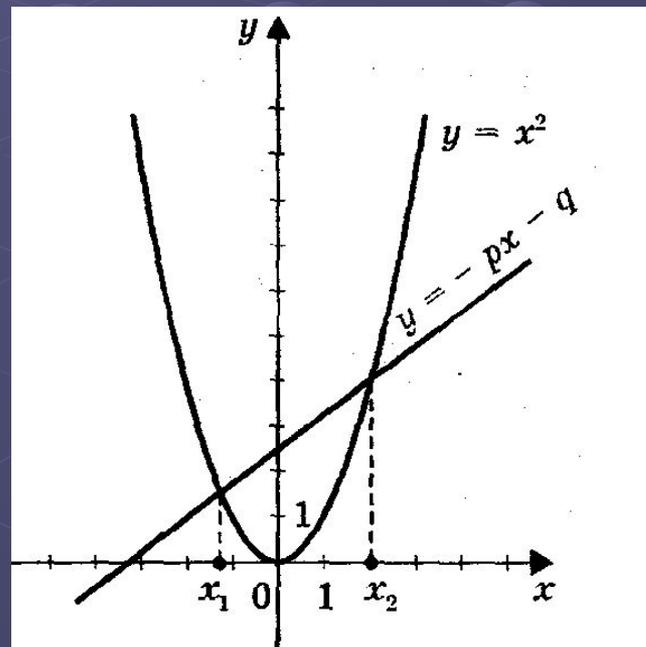


Рис. 1

• Пример

- 1) Решим графически уравнение
 $x^2 - 3x - 4 = 0$ (рис. 2).

Решение. Запишем уравнение в виде

$$x^2 = 3x + 4.$$

Построим параболу $y = x^2$ и прямую

$$y = 3x + 4.$$

Прямую

$y = 3x + 4$ можно построить по двум
точкам

$M(0; 4)$ и $N(3; 13)$.

Ответ: $x_1 = -1; x_2 = 4$

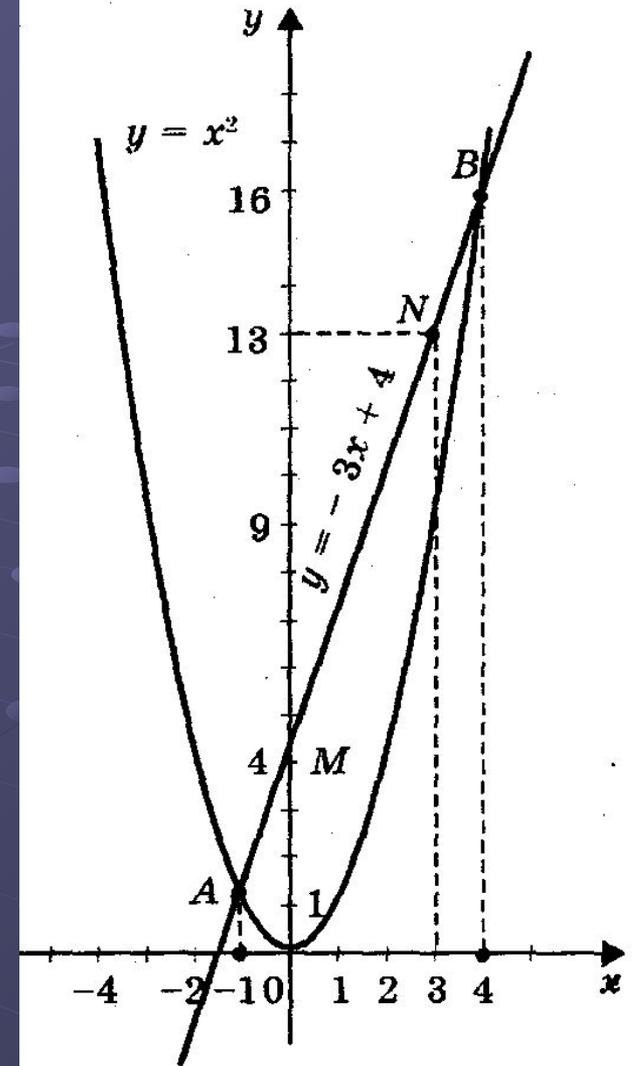


Рис. 2

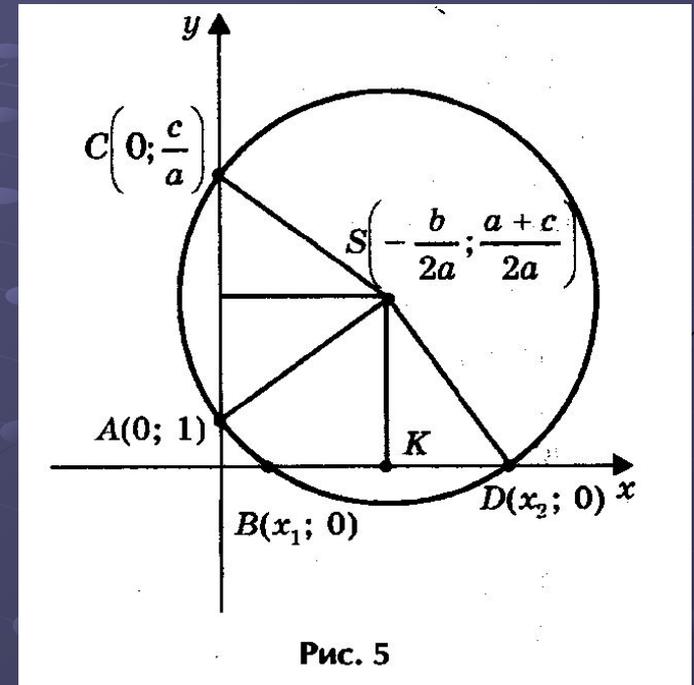
- 8. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис. 5).

Тогда по теореме о секущих имеем

$$OB \cdot OD = OA \cdot OC,$$

откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.



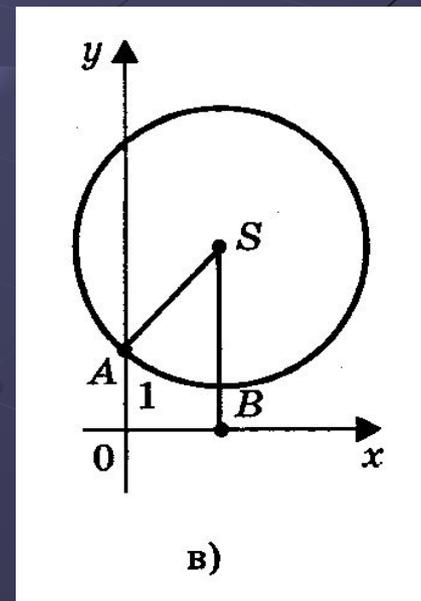
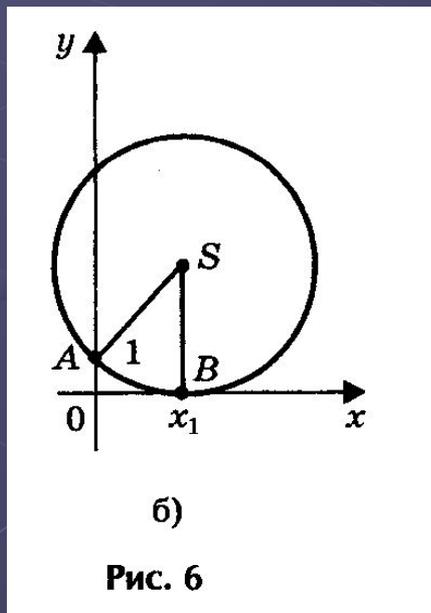
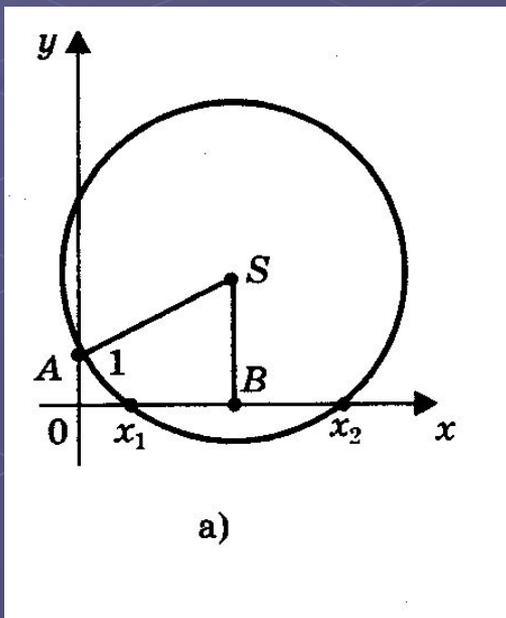
$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

• 1) Радиус окружности больше ординаты центра
 ($AS > SB$, или $R > a + c/2a$), окружность пересекает ось Ox в двух точках (б, а рис.) $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Радиус окружности равен ординате центра
 ($AS = SB$, или $R = a + c/2a$), окружность касается оси Ox (рис. 6,б) в точке $B(x_1; 0)$, где x_1 - корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра $(AS < SB, \text{ или } R < \frac{a+c}{2a})$
 окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае уравнение не имеет решения.



- 9. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

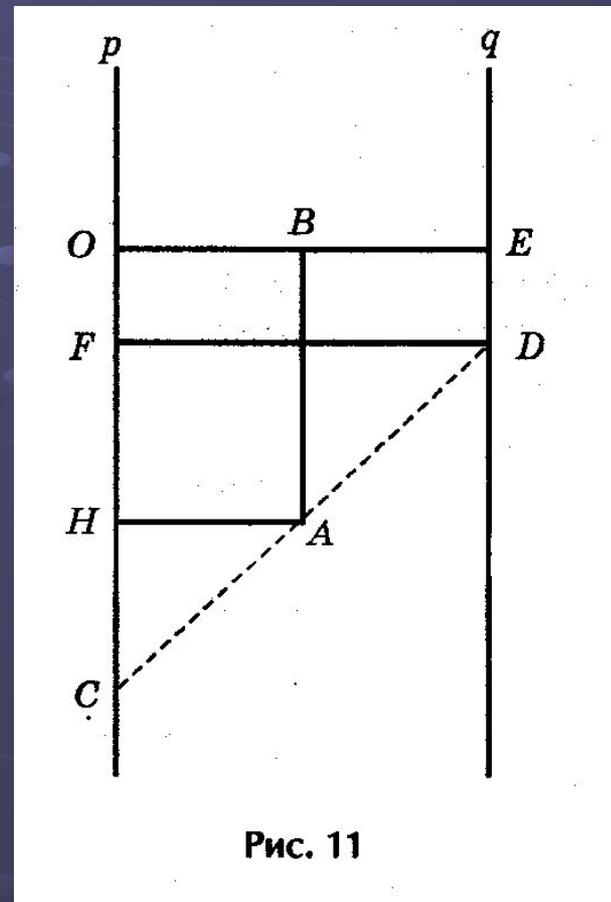
$$z^2 + pz + q = 0.$$

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.),

Из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию

$$\frac{p - q}{p - AB} = \frac{a}{OB},$$



• Примеры.

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$
номограмма дает корни $z_1 = 8,0$ и $z_2 = 1,0$ (рис.12).

2) Решим с помощью номограммы уравнение

$$2z^2 - 9z + 2 = 0.$$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение

$$z^2 - 4,5z + 1 = 0.$$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5$.

3) Для уравнения

$$z^2 - 25z + 66 = 0$$

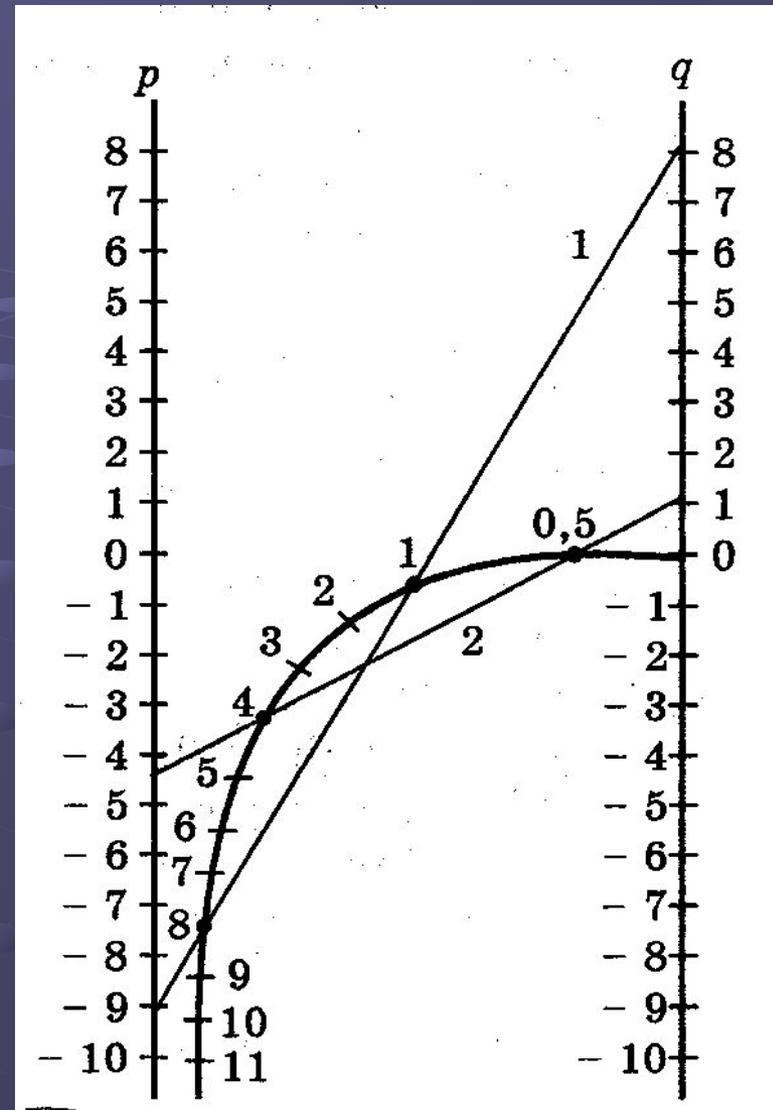
коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t$, получим уравнение

$$t^2 - 5t + 2,64 = 0,$$

которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0,6$ и

$t_2 = 4,4$, откуда

$$z_1 = 5t_1 = 3,0 \text{ и } z_2 = 5t_2 = 22,0.$$



- 10. СПОСОБ: Геометрический способ решения квадратных уравнений.

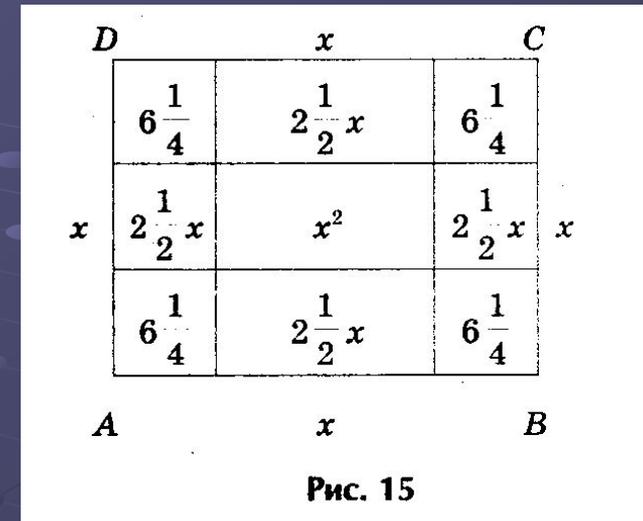
- **Примеры.**

1) Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом :

«Квадрат и десять корней равны 39»
(рис.15).

Для искомой стороны x первоначального квадрата получим



$$x = 8 - 2 \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{2} = 3.$$

$$y^2 + 6y - 16 = 0.$$

Решение представлено на рис. 16,

где $y^2 + 6y = 16$, или

$$y^2 + 6y + 9 = 16 + 9.$$

Решение. Выражения $y^2 + 6y + 9$ и $16 + 9$ геометрически представляют собой один и тот же квадрат, а исходное уравнение

$y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ - одно и то же уравнение.

Откуда и получаем, что $y + 3 = \pm 5$,
или $y_1 = 2$, $y_2 = -8$ (рис.16).

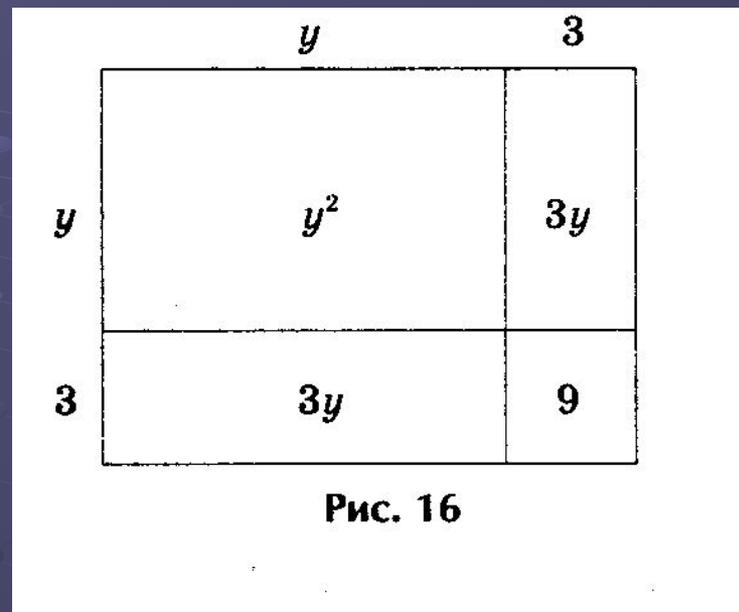


Рис. 16