

Математические предложения

План

I. Высказывания и высказывательные формы.

1. Значение истинности высказываний и высказывательных форм.
2. Простые и составные высказывания и высказывательные формы.
3. Логическая структура составного предложения.

II. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний

1. Таблица истинности высказываний.
2. Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм.

III. Высказывания с кванторами.

1. Квантор общности и значение истинности.
2. Квантор существования и значение истинности.

IV. Отрицание высказываний и высказывательных форм.

V. Отношения следования и равносильности.

VI. Структура и виды теорем.

1. Теорема, правила, формулы
2. Виды теорем.
3. Закон контрпозиции

VII. Основные выводы

Рассмотрим некоторые предложения

1. **« $1 + 9 = 20 - 10$. Это равенство»**
2. **$37 + 6 > 37$**
3. **$20 + 8 < 20$**
4. **«некоторые числа делятся на 5»**
5. **$5 + x = 9$**

Определим истинны ли они или ложные

Предложения **1,2,4** – истинные

Предложение **3** – ложное

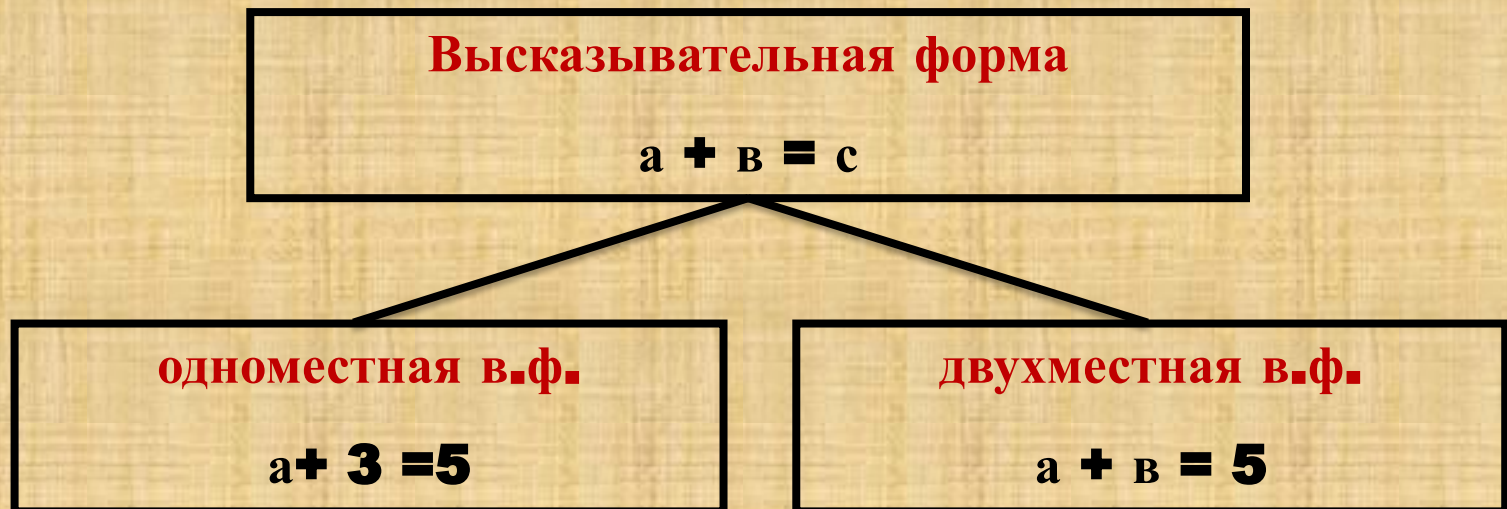
Предложение **5** – нельзя указать истинное оно или ложное

} высказывания

Высказывательная форма

Высказывание – предложение, относительно которого имеет смысл вопрос:
истинно оно или ложно.

Высказывательная форма – предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной.



Обозначения: A – «И» - высказывание A – истинно

B – «Л» - высказывание B – ложно

«И», «Л» - значения истинности высказывания

Множество истинности высказывательной формы – это значения переменной, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание.

Пример: определить множество истинности высказывательной формы $x <$

6, если а) $x \in \mathbf{N}$

б) $x \in \mathbf{Z}$ в) $x \in \mathbf{R}$

- a) Множество истинности – **$\{1,2,3,4,5\}$**
- b) Множество истинности – **$\{0,1,2,3,4,5\}$**
- c) Множество истинности – **$\{-\infty; 6\}$**

Выше рассмотренные предложения – **простые или элементарные предложения.**

Из двух простых предложений можно составить новые предложения с помощью союзов **«и», «или»...**

Логическая связка – **«и», «или», «если,...то», «не», «тогда и только тогда, когда».**

Составные предложения – это предложения, образованные из элементарных с помощью логических связок.

Для определения логической структуры составного предложения

необходимо установить:

1. Из каких элементарных предложений оно образовано;
2. С помощью, каких логических связок оно образовано.

Пример: **1) $x \geq 7$** – это составная высказывательная форма.

Логическая структура: «A или B»

Элементарные высказывательные формы – A – « **$x > 7$** »

B - « **$x = 7$** »

Логическая связка – «или»

2) «если треугольник равнобедренный, то углы при основании в нем равны» - это составное высказывание.

Логическая структура: «Если A, то B»

Элементарные предложения:

A – «треугольник равнобедренный»

B – «углы при основании равны»

Логические связки: «Если, то».

«Число **25** четное и делится на **5**»

Логическая структура – «А и В»

Элементарные высказывательные формы –

А – «**25** – четное число»

В – «**25** – делится на **5**»

Логическая связка – « и »

Проблема: «Как определить значение истинности составных предложений?»

Составное высказывание вида **«А и В»** называют **конъюнкцией** (лат. «соединение»), **обозначают $A \wedge B$.**

Определение. Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание $A \wedge B$, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из высказываний ложно.

Пример: $A - \text{«Л»} \Rightarrow A \wedge B - \text{«Л»}$ (по определению)

$B - \text{«И»}$

Составные высказывания вида **«А или В»** называют **дизъюнкцией** (лат. «разделение»), обозначают $A \vee B$.

Определение. Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание

$A \vee B$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Пример: «Число **25** делится на **5** или на **3**».

А – «**25** делится на **5**»

В – «**25** делится на **3**»

Логическая связка – или

Логическая структура - $A \vee B$

А – «И» $\Rightarrow$ – $A \vee B$ «И» (по определению)

В – «Л»

Составим таблицу истинности конъюнкции и дизъюнкции

А	В	$A \wedge B$	$A \vee B$
И	И	И	И
И	Л	Л	И
Л	И	Л	И
Л	Л	Л	Л

Конъюнкцию одноместных высказывательных форм обозначают:

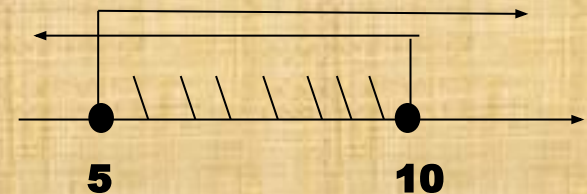
$$A(x) \wedge B(x)$$

Высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказывание, если обращаются в истинное высказывание обе высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ при значениях x из области определения X .

Пример: $x + 3 < 13$ $A(x) - x + 3 < 13$

Логическая структура
$$\begin{cases} 3x > 15 & B(x) - 3x > 15 \\ A(x) \wedge B(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 10 \\ x > 5 \end{cases}$$



Ответ: $A(x) \wedge B(x)$ – «И» при $x \in (5; 10)$.

Дизъюнкцию одноместных высказывательных форм обозначают:

$$A(x) \vee B(x)$$

Высказывательная форма $A(x) \vee B(x)$ обращается в истинное высказывание, при тех значениях x из области определения X , при которых обращается в истинное высказывание хотя бы одна из высказывательных форм.

Пример: $(x + 7)(x - 4) = 0$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

$$A(x) - x + 7 = 0$$

$$B(x) - x - 4 = 0$$

Логическая структура: $A(x) \vee B(x)$

$$x + 7 = 0 \quad \text{или} \quad x - 4 = 0$$

$$x = -7 \quad \quad \quad x = 4$$

Ответ. $A(x) \vee B(x)$ - И при $x \in (-7; 4)$.

Квантор существования – это выражения «существует», «некоторые», «найдется», «есть», «хотя бы один».

Обозначение: $\exists x$ – «существует x »

$(\exists x) A(x)$ – «существует такое значение x , что $A(x)$ – истинное высказывание».

Истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера, а ложность – доказывается.

Пример: «Некоторые прямоугольные треугольники являются
равносторонними».

Высказывание содержит квантор существования – «некоторые» и оно
– «Л». Это необходимо доказать.

В равностороннем треугольнике все углы по **60°** , а в прямоугольном
один из углов - **90°** . Следовательно, ни один прямоугольный
треугольник не может быть равносторонним.

Квантор общности – это выражения «всякий», «любой», «каждый» и «все».

Обозначение: $\forall x$ – для всякого x .

$(\forall x) A(x)$ – «для всякого x предложения $A(x)$ – истинное высказывание».

Истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства, а ложность – контрпример.

Пример: «Всякое натуральное число делится на **2** » высказывание содержит квантор общности – «всякое и оно – Л, т.к. **«3 не делится на 2»** - контрпример.

В математике часто приходится строить предложения в которых что – либо отрицается.

Пример: «**15** – простое число» A – Л

Построим отрицание высказывания: «неверно, что **15** простое число» - И

Обозначение: $\bar{A}$

Читают: «Не A » или «Неверно, что A ».

Определение.

Отрицанием высказывания A называется высказывание $\bar{A}$, которое ложно, если высказывание A истинно, и истинно, если высказывание A ложно.

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

Отрицании конъюнкции и дизъюнкции

Законы де Моргана

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee B$$

$$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge B$$

Чтобы построить отрицание конъюнкции (дизъюнкции), достаточно заменить отрицаниями составляющие её высказывания, а союз «и» («или») заменить союзом «или» («и»).

Пример: «Число **15** – нечетное и делится на **5**».

Построить отрицание высказывания.

Решение

$A \wedge B$ – И

I.способ. $A \wedge B$ - «Неверно, что 15 – нечетное число и делится на 5». $A \wedge B - Л \Rightarrow$ оно является отрицанием высказывания A .

II.способ. Воспользуемся законом де Моргана

$$A \vee B \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$$

«Число 15 – четное или не делится на 5» - Л

Отрицание высказываний с кванторами

Отрицание высказывания с квантором можно построить двумя способами:

- перед высказыванием ставится слова «неверно что»;
- квантор общности (существования) заменяется квантором существования (общности), а предложение, стоящее после квантора заменяется его отрицанием.

Пример: Построить отрицание высказываний

а) А – «Всякий многоугольник является четырехугольником» - Л –
высказывание с квантором общности.

I. способ. $\bar{A}$ – «Неверно, что всякий многоугольник является
четырехугольником» - И

$A - Л \Rightarrow \bar{A}$ построено верно

$\bar{A}$ – И

II. способ. $\bar{A}$ – «Некоторые многоугольники не являются
четырехугольниками» - И

$A - Л \Rightarrow \bar{A}$ построено верно

$\bar{A}$ – И

b) A – «Некоторые свойства квадрата присущие прямоугольнику» - И – высказывание с квантором существования.

I. **способ.** $\bar{A}$ - «Неверно, что некоторые свойства квадрата присущи прямоугольнику».

$A - И \Rightarrow \bar{A}$ построен верно

$\bar{A} - Л$

II. **способ.** $\bar{A}$ - «Всякое свойство квадрата не присуще прямоугольнику» - Л

$A - И$

$\bar{A} - Л$

Отношения следования и равносильности

Рассмотрим высказывательные формы:

$A(x) - \text{«}x > 5\text{»}$

$B(x) - \text{«}x > 2\text{»}$



Как связаны между собой?

Можно утверждать:

- «Все числа больше пяти больше двух» или
- «из того, что $x > 5$ следует, что $x > 2$ ».

Определение. Высказывательная форма $V(x)$ следует из высказывательной S формы $A(x)$, если $V(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x , при которых $A(x)$ истинна.

Обозначение: $A(x) \Rightarrow V(x)$

Читают:

- Из $A(x)$ следует V ;
- Всякое $A(x)$ есть $V(x)$;
- Если $A(x)$, то $V(x)$;
- $V(x)$ есть следствие $A(x)$;
- $A(x)$ – достаточное условие для $V(x)$
- $V(x)$ – необходимое условие для $A(x)$
- Как установить истинность предложения $A(x) \Rightarrow V(x)$?

Его можно сформулировать в виде:

«Всякое $A(x)$ есть $V(x)$ »

Имеет место высказывание с квантором общности, значит **истинность** устанавливается путем доказательства, а **ложность** – контрпример.

Рассмотрим высказывания:

$A(x)$ – «треугольник равнобедренный»

$B(x)$ – «Углы при основании треугольника равны »

$A(x) \Rightarrow B(x)$ – И

«Если в треугольнике углы при основании равны, то он равнобедренный» - И

Говорят: предложения $A(x)$ и $B(x)$ – равносильны.

Определение. Предложения $A(x)$ и $B(x)$ равносильны, если из предложения $A(x)$ следует предложения $B(x)$, а из предложения $B(x)$ следует предложение $A(x)$.

Обозначение: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$

Читают:

- $A(x)$ равносильно $B(x)$
- $A(x)$ тогда и только тогда, когда $B(x)$
- $A(x)$ – необходимое и достаточное условие $B(x)$
- $B(x)$ – необходимое и достаточное условие $A(x)$

Теорема – это высказывание, истинность которого устанавливается путем доказательства.

Логическая структура теоремы:

$A \Rightarrow B$, где A и B – высказывательные формы с одной или несколькими переменными.

Предложение **A** – условие теоремы;

B – заключение.

Теорема. Если a – любое число и n, k – натуральные числа, то справедливо равенство

$$a^n * a^k = a^{n+k}$$

Для удобства использования теоремой её формулируют в виде правила.

Правило. При умножении степеней с одинаковыми основаниями, основания оставляют прежним. А показатели степеней складывают.

$$a^n * a^k = a^{n+k}$$

Пусть дана теорема:

Теорема	$A \Rightarrow B$	«Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны» - И
Обратная теорема	$B \Rightarrow A$	«Если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом». - И
Противоположенная теорема		«Если четырехугольник не является ромбом, то его диагонали не перпендикулярны».
Обратная противоположной теорема		«Если в четырехугольнике диагонали не перпендикулярны, то четырехугольник не является ромбом».

- $$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

Закон контрапозиции

т.е. всегда когда истинна данная теорема, будет истинна и теорема обратная противоположенной.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте разницу между высказыванием и высказывательной формой.
2. Как определить логическую структуру составного предложения?
3. Сформулируйте различие между конъюнкцией и дизъюнкцией.
4. Как определяется истинность конъюнкции и дизъюнкции высказываний и высказывательных форм?
5. Сформулируйте правила определения истинности высказываний с кванторами.
6. Где используется закон де Моргана?
7. Каким образом можно построить отрицание высказываний с кванторами?
8. В каких случаях используют отношение логического следования и равносильности между предложениями?
9. В чем отличие теоремы от правила?
10. Какова логическая структура различных видов теорем?
11. Каким законом связаны различные виды теорем?

Задания для практической работы

Стойлова Л.П. Математика: Учебное пособие для студентов средних педагогических учебных заведений «Академия», 1998.

§3, п.16 № 4,5,6,8

п.17 № 1,2,3,5,

п. 18 № 3,4

п. 20 № 5,6,7,9,10

п. 21 № 2,3,4,8

п.22№ 2,5,9,12

п.23 №2,5,6