

Два замечательных предела.

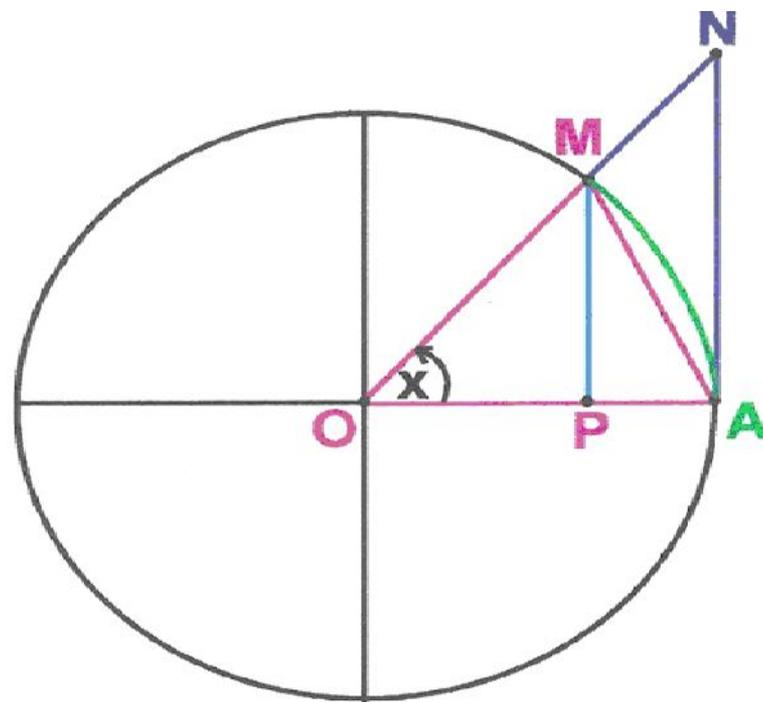
**Подготовил преподаватель
Ускова С.В.
«Красногорский колледж»**

Среди множества пределов, которые встречаются в математике и других дисциплинах, особое место занимают по их значению два предела, которые называются замечательными.

К первому замечательному пределу относится предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

Если воспользоваться для вычисления его теоремой о пределе частного, то получим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$, имеем предел вида $\frac{0}{0}$, ответ не определён, в этом случае надо попытаться преобразовать функцию, стоящую под знаком предела, но никаких видимых ориентиров для преобразования отношения $\frac{\sin x}{x}$ нет. **Что же делать?**



Математики нашли выход из этого положения, они прибегли к геометрическим соображениям, которые заключаются в следующем.

Возьмём окружность радиуса $OA = R = 1$ и некоторый угол X с вершиной в центре окружности (рис. 4). Проведём далее хорду AM и касательную AN , пересекающую продолжение радиуса OM в точке N .

Из рисунка видно:

$$S_{\Delta OAM} < S \text{ кругового сектора } AOM < S_{\Delta AON} \quad (1)$$

$$S_{\Delta OAM} = \frac{1}{2} OA \cdot MP \quad (2)$$

$$S_{\text{кр. сектора } AOM} = \frac{1}{2} OA \cdot MA \quad (3)$$

$$S_{\Delta AON} = \frac{1}{2} OA \cdot AN \quad (4)$$

Представляя из (2) (3) и (4) в (1) получим:

$$OA \cdot MP/2 < OA \cdot MA/2 < OA \cdot AN/2 \quad (5)$$

Т.к. $OA=R=1$ после умножения на 2 получим:

$$MP < AM < AN \quad (6)$$

Т.к $MP=\sin x$ $AN=\operatorname{tg} x$ $AM=x$ поэтому (6) принимает вид:
 $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ или $\sin x < x < \sin x / \cos x$ (7)

Т.к X - острый угол, то $\sin x$ - величина положительная;
Разделив неравенства (7) на $\sin x$ получим

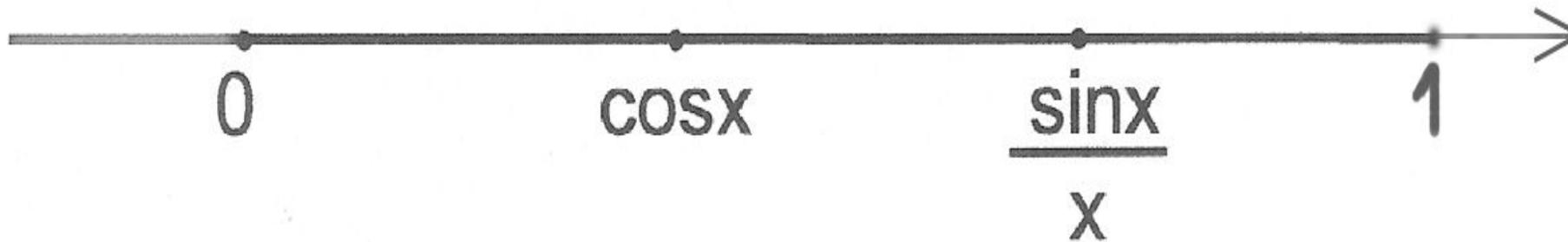
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Или, взяв обратные отношения в этих неравенствах, будем иметь $1 > \sin x / x > \cos x$ (8)

(поясним на примере: $1 < 5/2 < 7/2$ – очевидно; возьмем обратные отношения $1 > 2/5 > 2/7$)

Из тригонометрии известно, что если $X \rightarrow 0$, то $\cos x \rightarrow 1$.
но т.к. отношение $\sin x / x$ согласно неравенству (8) заключено между единицей и $\cos x$ то оно и подавно стремится к единице.

Это стремление отношения $\sin x / x$ к единице хорошо просматривается, если величины, содержащиеся в неравенстве (8) представить на координатной оси (рис.5)



Итак:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Почему же этот предел удостоился названия замечательного?

Воспользуемся понятием предела
функции:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$
$$f(x) - a = b$$

С учётом этого (*) можно переписать так:

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = b \quad (9)$$

Умножая (9) на x , получим: $\sin x - x = b \cdot x$ или $\sin x = x + b \cdot x$
(10)

В правой части равенства (10) $x \rightarrow 0$ (по условию) - это бесконечно малая величина,

$b \cdot x$ -, бесконечно малая функция 2го
порядка; пренебрегая этим слагаемым,
получим: $\sin x \approx x$ (*)

Получили из равенства (*) - **Синусы малых углов примерно равны величинами самих углов**, а это значит, что для нахождения синусов малых углов достаточно воспользоваться (*), разумеется, что угол здесь измерен в радианах.

Возникает вопрос: **каков диапазон углов, синусы которых можно находить по (*)?**

Оказывается достаточно большой, так если $X \in [0; 6)$, то с точностью до 4-го знака после запятой работает равенство $\sin x = x$.

Пример: $X = 2^\circ$; $\sin 2^\circ \approx 2^\circ$ (рад); тогда $2^\circ = X \text{ рад} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ рад}} = 2 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{90^\circ} = \frac{3,14}{90^\circ} = 0,03488$, получим, что $\sin 2^\circ = 0,03488$, точное значение $\sin 2^\circ = 0,03489$ (по МК)

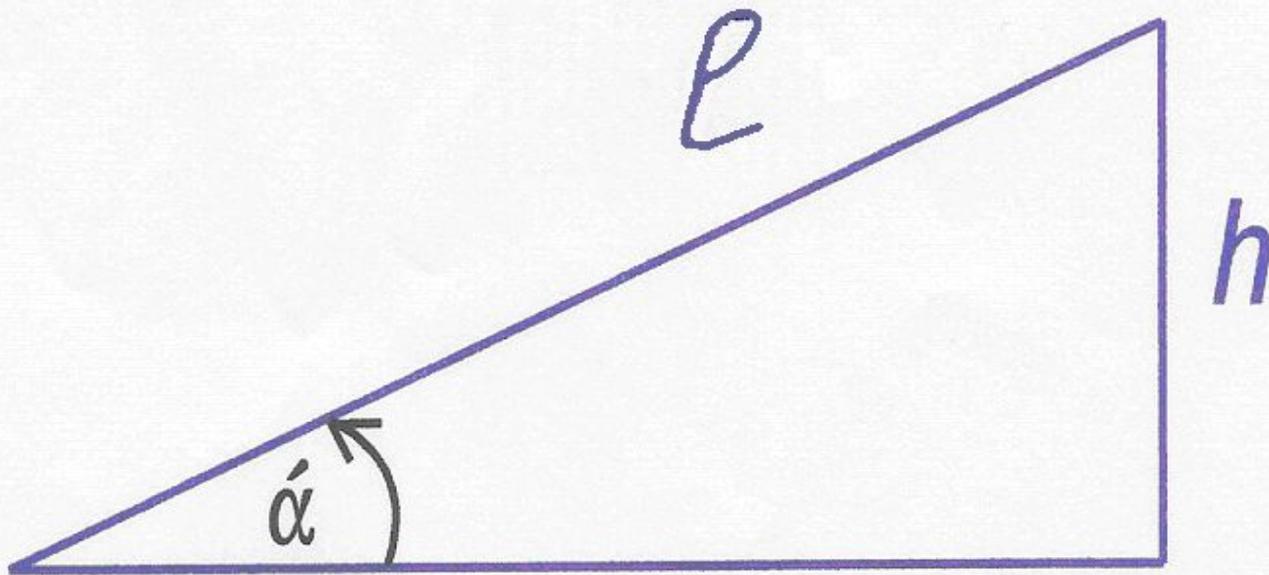
Если $X \in [6^\circ; 12^\circ)$, то $\sin x = x$ с точностью до 3-го знака.

Пример: $X = 10^\circ$; $\sin 10^\circ \approx 10$ (рад);
тогда $10^\circ = X \text{ рад} \cdot 180^\circ / \pi \text{ рад} = X = 10\pi / 180^\circ = \pi / 18^\circ = 3,14 / 18^\circ = 0,1744$,
получим, что $\sin 10^\circ = 0,1744$; точное значение $\sin 10^\circ = 0,1744$ (по МК)

Если $X \in [12^\circ; 20^\circ)$, то $\sin x = x$ с точностью до 2-го знака.

Пример: $X = 18^\circ$; $\sin 18^\circ \approx 18$ (рад);
тогда $18^\circ \text{ — } X \text{ рад } 180^\circ \text{ — } \pi \text{ рад } X =$
 $18\pi/180^\circ = \pi/10^\circ = 3,14/10^\circ = 0,314$,
получим, что $\sin 10^\circ = 0,314$; точное
значение $\sin 18^\circ = 0,309$ (по МК)

Тот факт, что синусы малых углов можно заменить величинами самих углов, имеет непревзойдённое значение и при решении прямоугольных треугольников, когда острый угол заключён в промежутке до 20° . К примеру, в треугольнике (Рис.6)



известны l (гипотенуза) и α , требуется найти h .

Из соотношения $\frac{h}{l} = \sin \alpha \Rightarrow h = l * \sin \alpha$

Если угол небольшой, то $\sin \alpha \approx \alpha$ и тогда $h \approx l * \alpha$

Из расчётов “ушёл” синус, оперируем только углами.

На сколько это важно – убедитесь при расчётах различных оптических систем, а также в механике при движении тел по наклонной плоскости с малыми углами наклона.

Возможность (*) ещё и в том, что с его помощью можно доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

откуда следует, что для малых углов $\operatorname{tg} x \approx x$

Для углов до 6° выполняется равенство $\operatorname{tg} x = x$ с точностью до 4го знака после запятой; для больших

Углов точность понижается, другими словами диапазон углов, для которых $\operatorname{tg} x$, меньший, чем у синуса.

И последние по первому "Замечательному пределу".

Так как $\left. \begin{array}{l} \sin x \approx x \\ \operatorname{tg} x \approx x \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\sin x \approx \operatorname{tg} x}$

Краткие выводы из первого
"Замечательного предела"

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

1. Для нахождения синусов и тангенсов малых углов можно обойтись без таблиц и вычислительной техники, для этого достаточно данный угол выразить в радианной мере,

$$\text{Например, } \sin 2^\circ = \left(\frac{180^\circ - \pi \text{ рад.}}{2^\circ - \frac{\pi * 2^\circ}{180^\circ}} \right) =$$
$$= \pi/90 = 3,14/90 = 0,03490\dots$$

(точное значение $\sin 2^\circ = 0,034899\dots$)

2. Тангенсы малых углов при расчётах можно заменить синусами.

$$\text{Например, } \sin 5^\circ = 0,0872; \text{ tg } 5^\circ = 0,0874$$

(если для расчётов достаточно 3х знаков !)

3. Если угол небольшой, то при решении прямоугольных треугольников синусы можно заменить углами.

Для подтверждения теоретического вывода 1го “замечательного” предела можно убедиться в его истинности, выполнив с помощью, разумеется вычислительных средств, следующие расчёты: взять ряд произвольных углов, например, $30^\circ; 20^\circ; 10^\circ; 5^\circ; 3^\circ; 1^\circ; 0,5^\circ$, перевести их в радианы, затем найти синусы заданных углов и взять отношение $\frac{\sin a}{a}$

Это отношение всё меньше и меньше будет отличаться от единицы.

Ниже приведена таблица с результатами расчётов.

α	30°	20°	10°	5°	3°	1°	$0,5^\circ$
α рад.	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{60}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{360}$
$\sin \alpha$	0,5	0,342	0,1736	0,0871	0,0523	0,0174	0,0087
$\sin \alpha / \alpha$	0,9554	0,9805	0,9954	0,9988	1	1	1

Ко второму “Замечательному” пределу относится предел функции

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

В курсе высшей математике доказывается, что предел $(1+1/x)^x$ при $x \rightarrow \infty$ существует (он больше 2, но меньше 3) и выражается иррациональным числом, т. е.

$$2 < \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3$$

Для пояснения сказанного составим следующую таблицу выражения $(1+1/x)x$ при возрастающих значениях X :

x	1	2	5	10	100	1000
$(1+1/x)x$	2	2,25	2,49	2,59	2,705	2,713

Из таблицы видно, что по мере возрастания X выражение $(1+1/x)x$ также возрастает, замедляясь в росте.

Предел $(1 + \frac{1}{x})^x$ при $X \rightarrow \infty$, равный приблизительно 2,718, принято обозначать буквой e , которое называется числом Непера.

Джон Непер (1550 – 1617) шотландский математик, он был первым создателем таблиц логарифмов – натуральных, которые в математике называют **НЕПЕРОВЫМИ**.

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,71828\dots = e$$

число Непера

В прикладных дисциплинах это число называют экспонентой (exp) и записывают так:

$$\text{exp} = 2,71828\dots = e$$

$$\text{exp}(5x) = e^{5x};$$

$$\text{exp}(-2t) = e^{-2t}.$$

Можно доказать, что для любой бесконечно малой функции α выражение $(1+\alpha)^{1/\alpha}$, т. е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{1/\alpha}$$

Возникает вопрос: **почему этот предел называют “замечательным”?**

Во-первых, в математике число e имеет очень важное значение, которое можно сравнить со значением числа $\pi = 3,14$. Как было отмечено в теории логарифмов, число e принимают за основание натуральных чисел, или Неперовых логарифмов, имеющих большое применение в математическом анализе, так как с их помощью многие формулы можно представить в более простом виде, чем при пользовании десятичными логарифмами.

Во – вторых, нет такой области в науке и технике, где можно было бы обойтись без числа e : многие параметры, которые характеризуют переменные процессы, изменяются по экспоненциальному закону, то есть по закону, связанному с числом Непера.

Примеры:

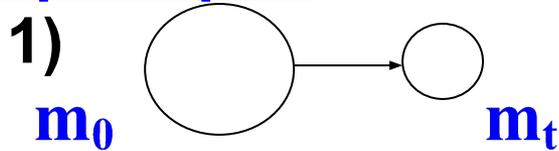


рис. 6

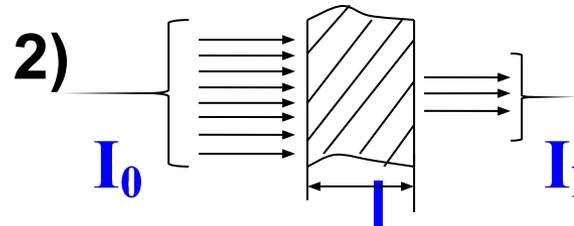


рис. 7

- 1) Рисунок 6. Масса радиоактивного вещества со временем изменяется (уменьшается) по закону $m_t = m_0 \cdot e^{-kt}$, где m_0 – начальное его количество, t – время, k – коэффициент распада, зависит от того вещества.
- 2) Рисунок 7. Интенсивность падающего на среду любого излучения также изменяется по экспоненциальному закону, т. е. $I_1 = I_0 \cdot e^{-kl}$
- 3) ЭДС источника тока со временем изменяется по закону экспоненты, т. е. $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_0 \cdot e^{-kt}$
- 4) Объём растущего дерева также находится с помощью экспоненты: $V_t = V_0 \cdot e^{kt}$