



КОМБИНАТОРИКА

Размещения

,

перестановк

и,



Определение

Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют «ЭН

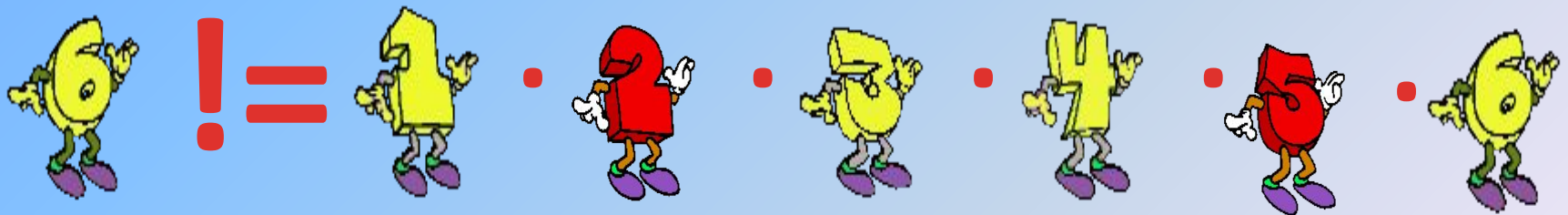
факториал»:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Наприме

р:

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$



Теорема

1:

n различных элементов



можно расставить по
одному на n различных
мест ровно $n!$



способами.
 $P_n = n!$

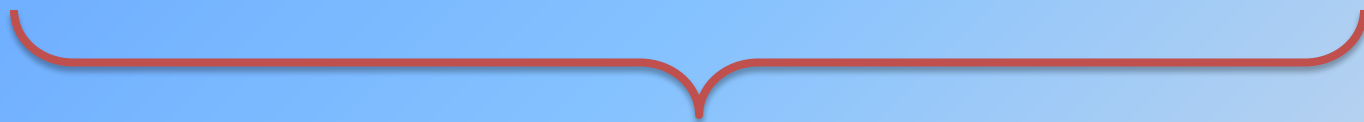


перестановки



Наприме

р:



6 слонят

Сколькокими способами можно их расставить?

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Задача

К ¹хозяину дома пришли гости А, В, С, D. За круглым столом – пять разных стульев.

а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?

б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место хозяина дома уже известно?



A



B



ХОЗЯИ



C



D

Решени

а) **е** На 5 стульев должны сесть 5 человек (включая хозяина дома).
Значит, всего имеется P_5 способов их рассаживания:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$



Решени

б) **е:** Так как место хозяина фиксировано, то следует рассадить четырех гостей на четыре места. Это можно сделать P_4 способами:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

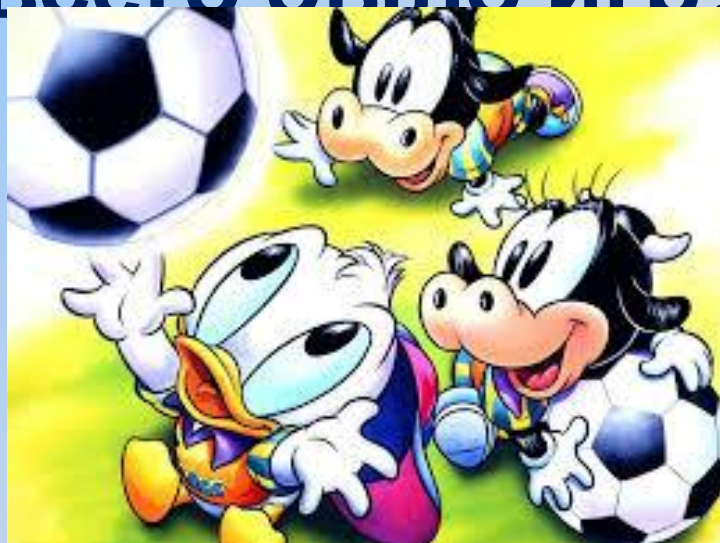


Задача

2:



В чемпионате по футболу участвовало 7 команд. Каждая команда сыграла по одной игре с каждой командой. Сколько всего было игр?



Решени

Первый способ:

Рассмотрим таблицу 7x7, в которой вписаны результаты игр. В ней 49 клеток:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3:1	0:5	2:2	0:0	1:0	1:3
2			4:3	1:0	1:0	0:0	1:1
3				1:3	1:0	1:2	0:0
4					1:1	1:1	1:4
5						1:0	0:0
6							2:2
7							

По диагонали клетки закрашены, т.к. никакая команда не играет сама с собой. Если убрать диагональные клетки, их

Решени

е:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3:1	0:5	2:2	0:0	1:0	1:3
2	1:3		4:3	1:0	1:0	0:0	1:1
3				1:3	1:0	1:2	0:0
4					1:1	1:1	1:4
5						1:0	0:0
6							2:2
7							

В нижней части таблицы результатов нет, т.к. все они получаются отражением уже имеющихся результатов из верхней части таблицы. Количество всех проведенных игр равно половине от 42, т.е. 21.

Второй способ:

Произвольно пронумеруем команды №1, №2,..., №7 и посчитаем число игр поочередно. Команда №1 встречается с командами №2-7 – это 6 игр. Команда №2 тоже проведет 6 встреч, но одну игру, с командой №1, мы уже посчитали. Получается 5 новых игр. Команда №3 проведет 6 встреч, из которых две, с №1 и №2 мы посчитали, значит, добавится еще

	1	2	3	4	5	6	7
1		3:1	0:5	2:2	0:0	1:0	1:3
2			4:3	1:0	1:0	0:0	1:1
3				1:3	1:0	1:2	0:0
4					1:1	1:1	1:4
5						1:0	0:0
6							2:2
7							

учим:

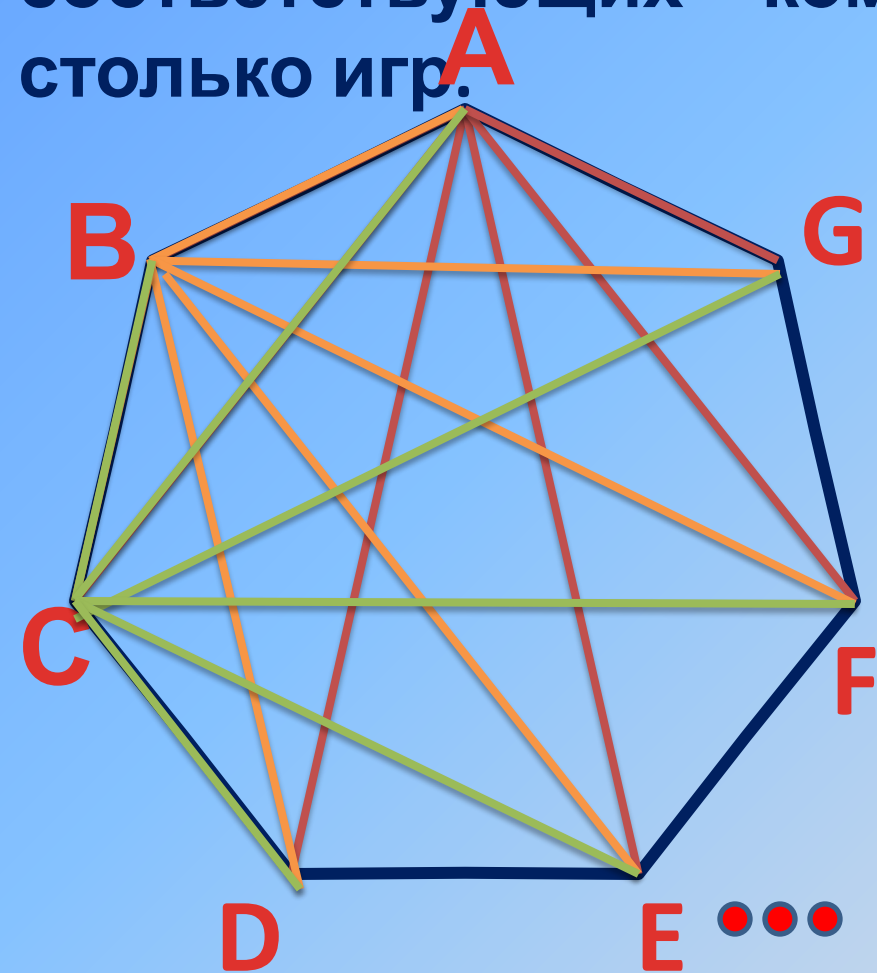
6
игр
игр
игр
игр
игр
игра

$$6+5+4+3+2+1=21$$

21
игра

Третий способ:

Используем геометрическую модель: 7 команд – это вершины выпуклого семиугольника, а отрезок между двумя вершинами – это встреча двух соответствующих команд: сколько отрезков, столько игр.



Из каждой вершины выходит 6 отрезков. Получается $7 \cdot 6$ отрезков, каждый из которых посчитан дважды: как AB , так и BA . Значит, всего проведен $(7 \cdot 6) : 2 = 42 : 2 = 21$ отрезок.

Вывод

Состав игры определен, как только мы выбираем две команды. Значит, количество всех игр в турнире для n команд – это количество всех выборов двух элементов из n данных элементов. При этом порядок выбора **не важен**



Теорема

Если ^{2!} множество состоит из n элементов и требуется выбрать два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно

произвести

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

способами.



Определение

Число **2** всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных элементов называют числом сочетаний из n элементов по 2 и

C_n^2 «с из двух»]

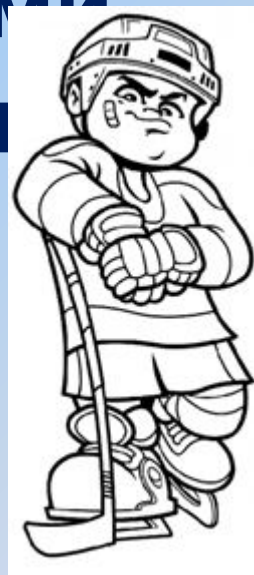
Задача

3: Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки, которые они «давненько не брали в руки». Сколько встреч было:

а) между футболистами

б) между хоккеистами

в) всего?



Решени

а) $C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$

б) $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$



в) $C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136$

А что получится, если мы будем
учитывать **порядок** двух выбираемых
элементов?

Теорема

Если **3:** множество состоит из n
элементов и требуется выбрать
два элемента учитывая их
порядок, то такой выбор можно
произвести

$$n(n-1)$$

способами.



Определение

Число **3** всех выборов двух элементов с учетом их порядка из n данных элементов называют числом размещений из n элементов по 2 и

A_n^2 [«размещений по два»]

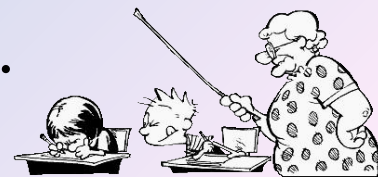
Задача

В **4:** классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) первый ученик должен решить задачу по алгебре, а второй – по геометрии;

Решени б) должны быстро стереть с доски?
В **случае** а) порядок важен, а в случае б) – нет. Значит,

$$\text{а) } A_{27}^2 = 27 \cdot 26 = 702; \quad \text{б) } C_{27}^2 = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351.$$



А как будут выглядеть формулы, если в них верхний индекс заменить на 5, 7, 10 и т.д.? Сколькими способами можно выбрать 5 учеников из 30 для дежурства в столовой; 7 монет из 10 данных; 10 карт из колоды в 32 карты?

Определение

Число всех выборов k элементов из n данных без учета порядка называют **числом сочетаний из n элементов по k** и обозначают C_n^k

Число всех выборов k элементов из n данных с учетом их порядка называют **числом размещений из n элементов по k** и обозначают A_n^k



Теорема

Для **4:** любых натуральных чисел n и k таких, что $k < n$, справедливы соотношения:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ЗАДАЧИ



Задача

В классе 27 учеников, из них нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) первый ученик должен решить задачу, второй – сходить за мелом, третий – пойти дежурить в столовую?

б) им следует спеть в хор



Задача

6: «Проказница Мартышка, Осел, Козел и Косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Мишке поручили выбрать 4 любых инструмента из имеющихся 11.

а) найти число всевозможных выборов инструментов;

б) найти число всевозможных рассаживаний участников квартета с выбранными четырьмя инструментами (инструменты, как в басне Крылова, занимают четко отведенные позиции)

