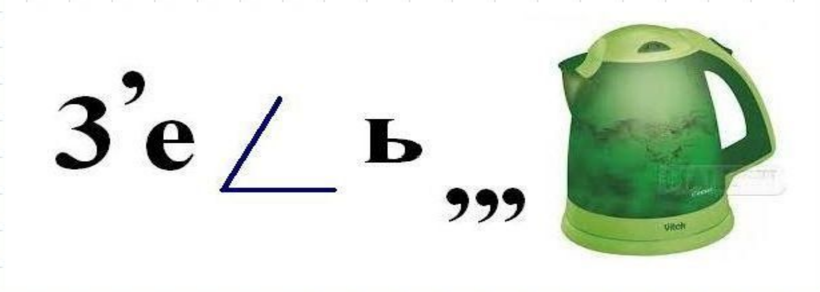
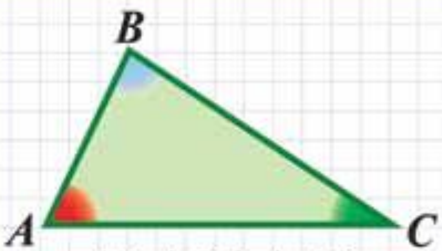
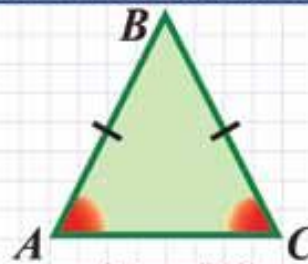
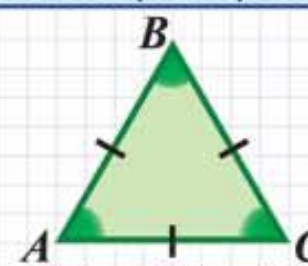
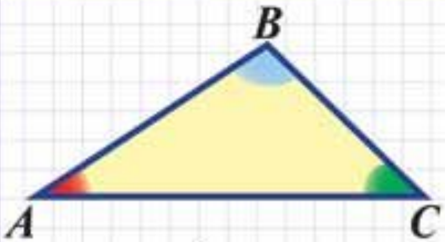
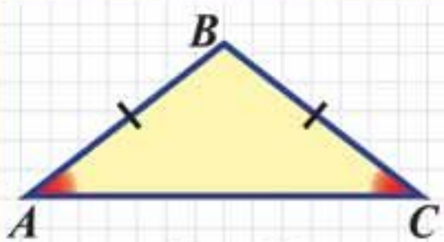
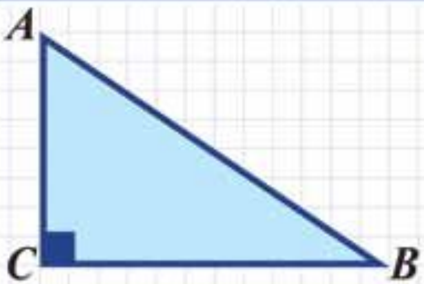
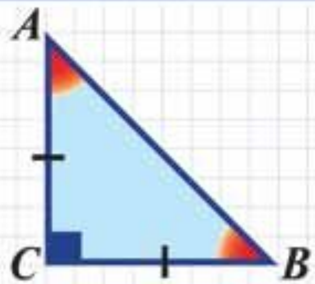
Прямоугольный треугольник

Отгадайте ребус



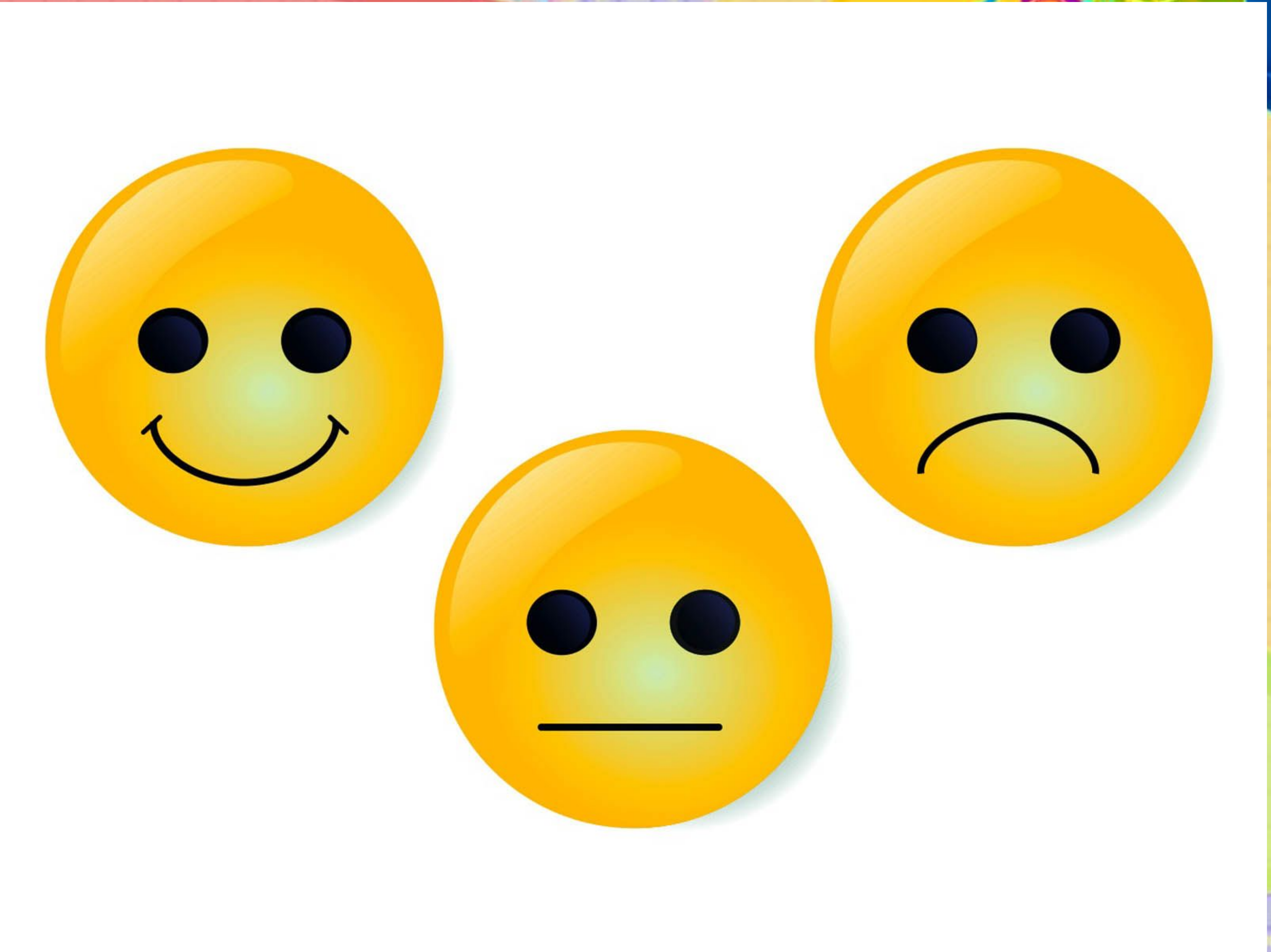
ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ПО СТОРОНАМ / ПО УГЛАМ	РАЗНОСТОРОННИЕ (все стороны разные)	РАВНОБЕДРЕННЫЕ (две стороны равны)	РАВНОСТОРОННИЕ (все стороны равны)
ОСТРО-УГОЛЬНЫЕ (все углы острые)	 $AB \neq BC \neq AC$ $\angle A < 90^\circ; \angle B < 90^\circ; \angle C < 90^\circ$	 $AB = BC$ $\angle A = \angle C; \angle B < 90^\circ$	 $AB = BC = AC$ $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$
ТУПО-УГОЛЬНЫЕ (один угол тупой)	 $\angle B > 90^\circ$ (или $\angle A > 90^\circ$ или $\angle C > 90^\circ$)	 $\angle B > 90^\circ$	—
ПРЯМО-УГОЛЬНЫЕ (один угол прямой)	 $\angle C = 90^\circ$	 $\angle A = \angle B = 45^\circ$	—

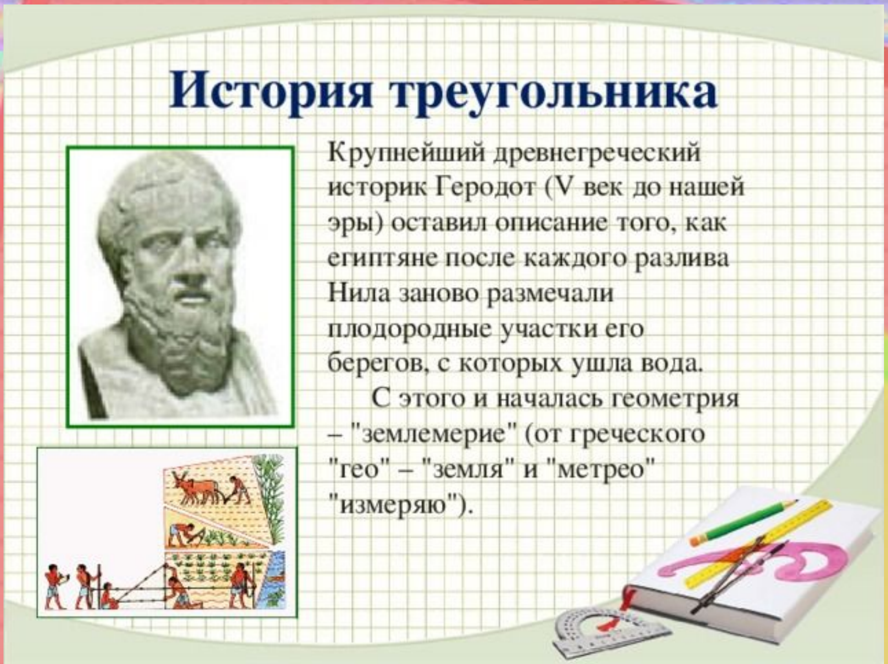
Цели и задачи:

- Повторить, обобщить и систематизировать теоретический материал по теме;
- Повторить способы решения задач на нахождение элементов и площадей треугольника;
- Рассмотреть способы решения прикладных и старинных задач.

Эмоциональный фон занятия



Исторический экскурс



Стелькин Дмитрий

Кравцова Татьяна

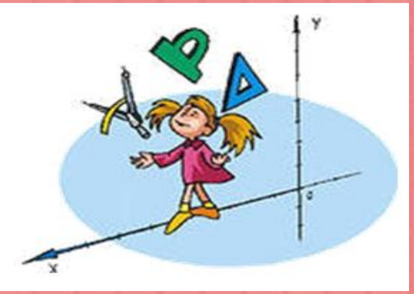
Прямоугольный треугольник

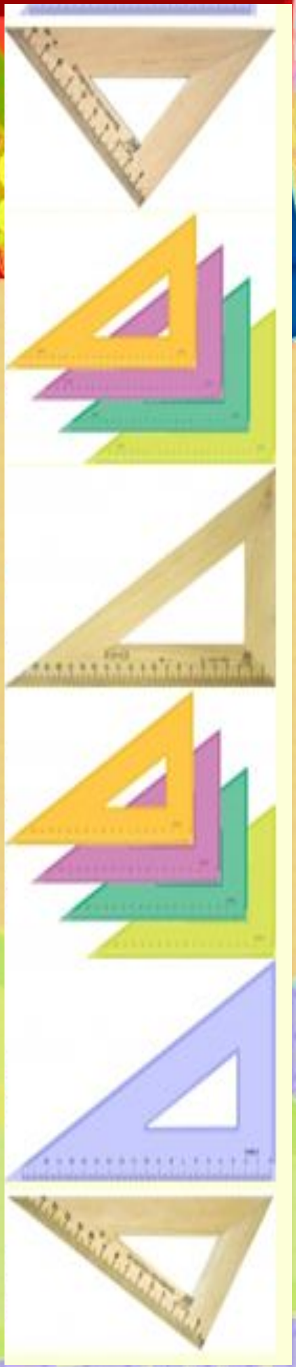
Определение:

Прямоугольный треугольник – треугольник, у которого один из углов равен 90°

Элементы:

- Сторона, противоположная прямому углу, называется **ГИПОТЕНУЗОЙ**
- Стороны, прилегающие к прямому углу, называются **КАТЕТАМИ**





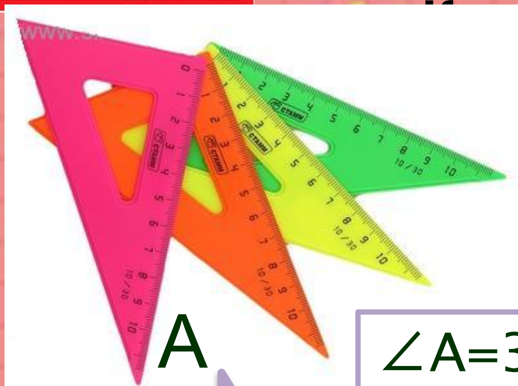
Прямоугольный треугольник

Свойства прямоугольного треугольника

- В прямоугольном треугольнике любой из **катетов меньше гипотенузы**. $a < c,\ b < c$
- По свойствам перпендикуляра и наклонных **гипотенуза длиннее** каждого из катетов (но меньше их суммы). $c < a + b$
- **Сумма** двух **острых углов** прямоугольного треугольника равна прямому углу. $\angle A + \angle B = 90^0$
- **Две высоты** прямоугольного треугольника совпадают с его катетами
- В прямоугольном треугольнике **медиана**, проведенная гипотенузе, равна половине гипотенузы.
- Точку пересечения высот треугольника (или их продолжений) называют **ортоцентром** треугольника.

Ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает **с вершиной прямого угла**

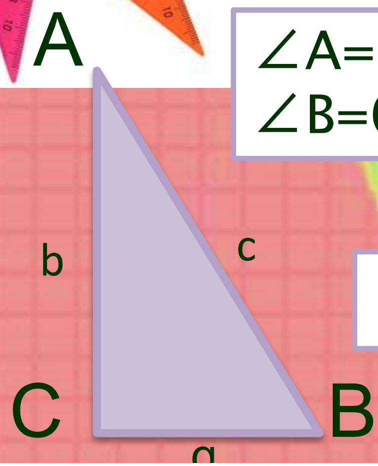
Прямоугольный треугольник



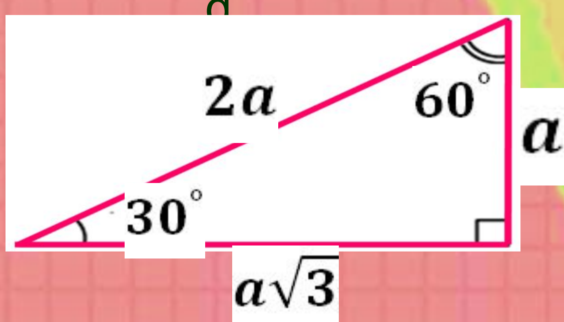
ссический ви

∠C=90°

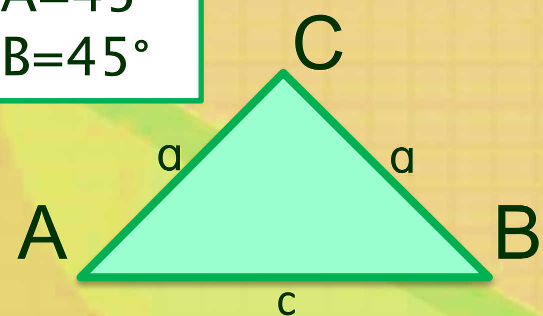
∠A=30°
∠B=60°



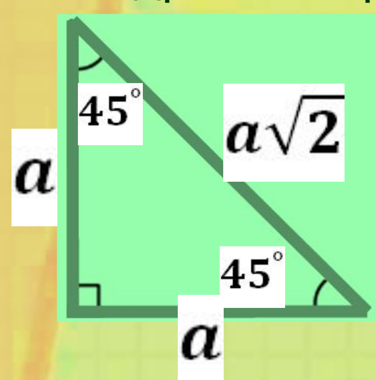
a = ½ c



∠A=45°
∠B=45°



Равнобедренный треугольник



Прямоугольный треугольник

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

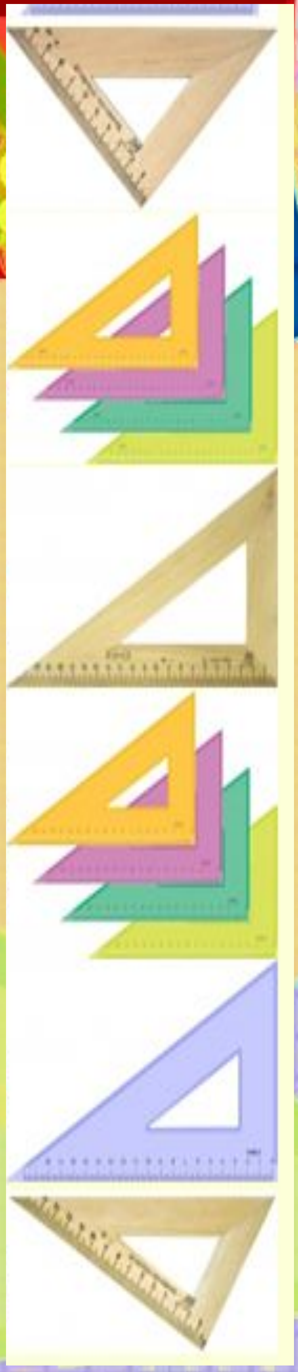
- по катету и гипотенузе;

- по двум катетам;

- по катету и острому углу;

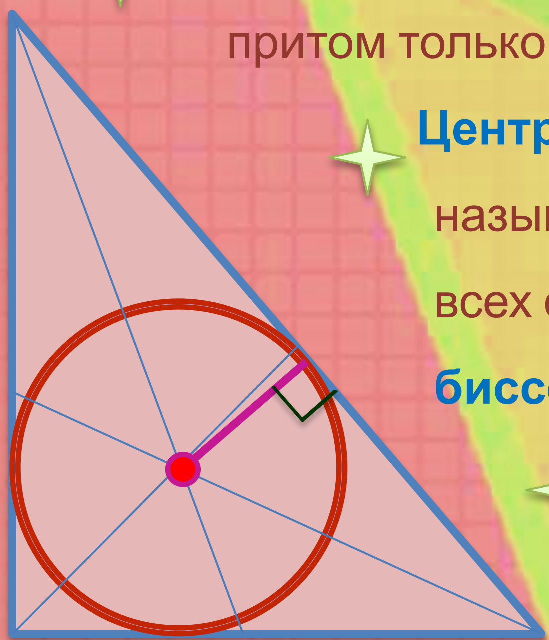
- по гипотенузе и острому углу.

Прямоугольный треугольник



Окружность, вписанная в треугольник

- В каждый **треугольник** можно вписать окружность, притом только одну.



- **Центр** вписанной окружности называется **инцентром**, он равноудалён от всех сторон и является точкой пересечения **биссектрис** треугольника.
- **Радиус** вписанной в прямоугольный треугольник с катетами **a, b** и гипотенузой **c** окружности равен

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

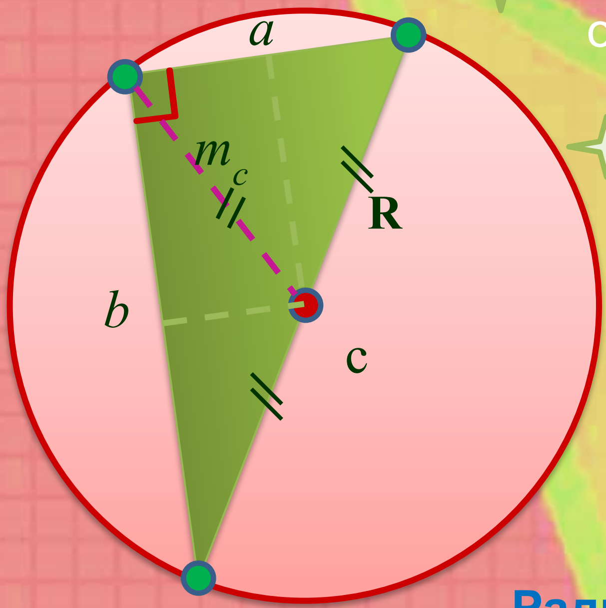
$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

$$r = \frac{S}{p}$$

$$r = p - c$$

Прямоугольный треугольник

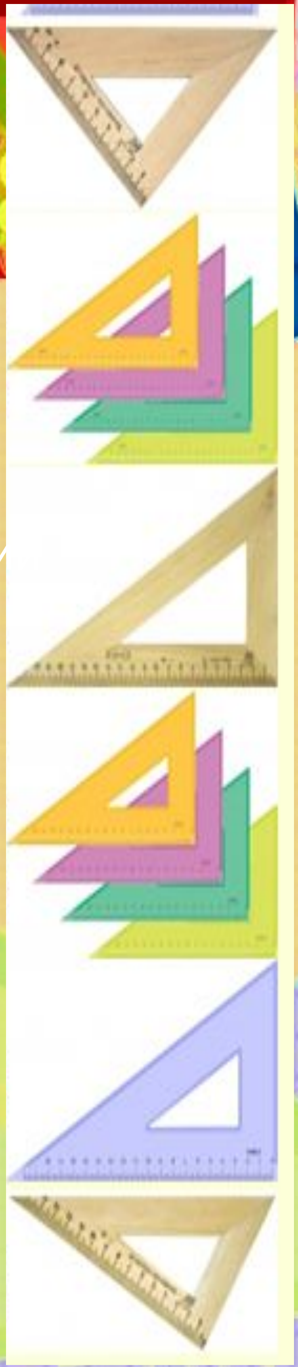
Окружность, описанная около треугольника



- Около любого **треугольника** можно описать окружность.
- **Центр** окружности, описанной около треугольника, находится на пересечени **серединных перпендикуляров.**
- У прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит **на середине гипотенузы.**
- **Радиус** равен половине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$

Радиус равен медиане, проведенной к гипотенузе: $R = m_c$

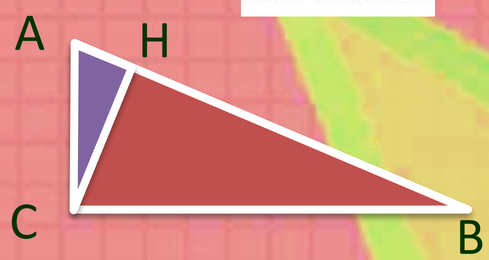
- $R + r = \frac{a + b}{2}$



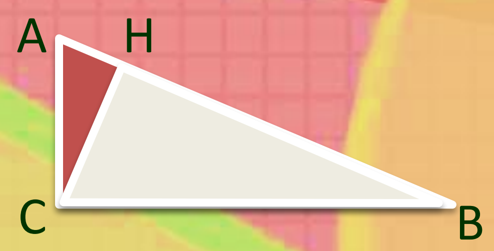
Прямоугольный треугольник

Подобие прямоугольных треугольников:

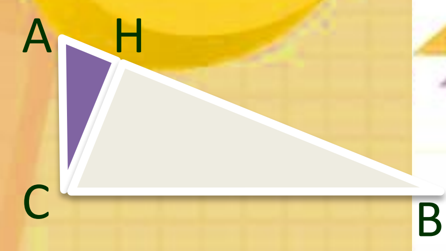
$CH \perp AB$



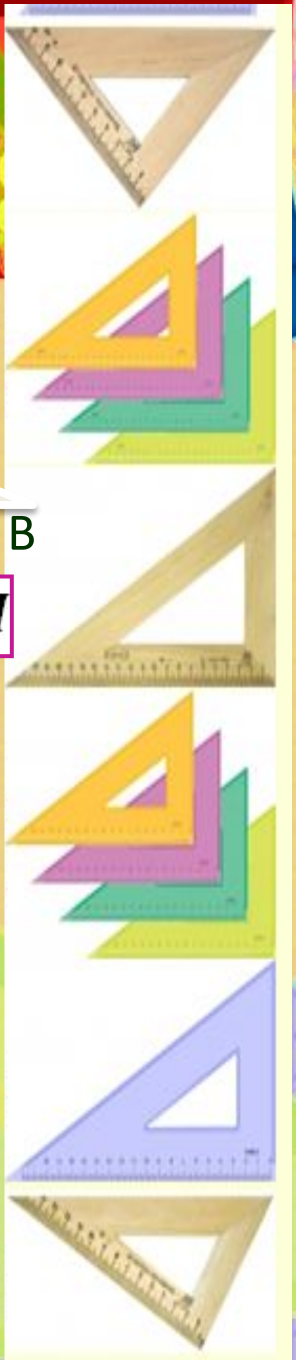
$\Delta ABC \sim \Delta ACH$



$\Delta ABC \sim \Delta CBH$



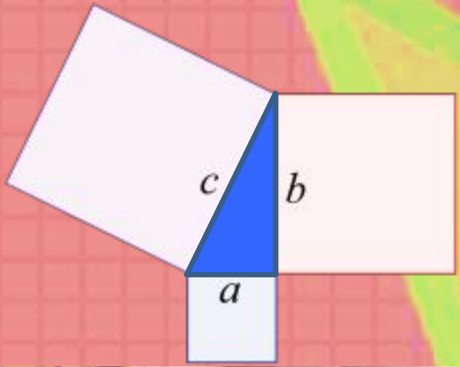
$\Delta ACH \sim \Delta CBH$



- **Высота** прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник **на два подобных** прямоугольных треугольника, каждый из которых **подобен данному** треугольнику.

Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора



В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

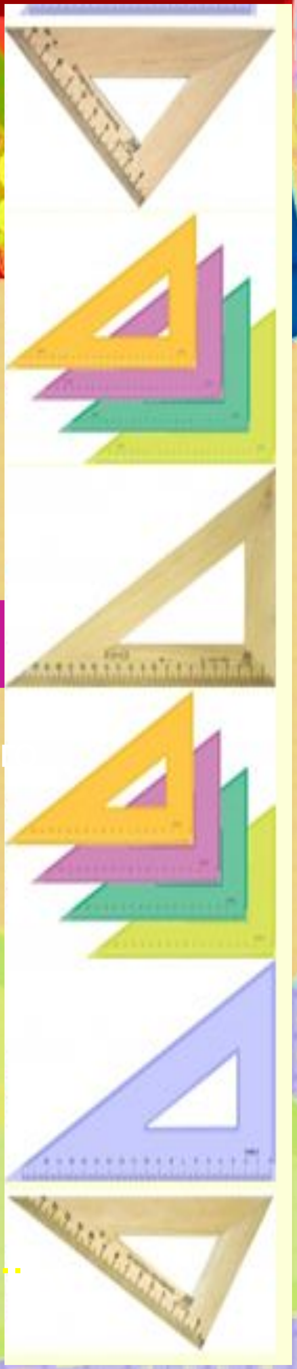
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Если длины всех трёх сторон прямоугольного треугольника являются **целыми числами**, то треугольник называется **пифагоровым треугольником**, а длины его сторон образуют так называемую

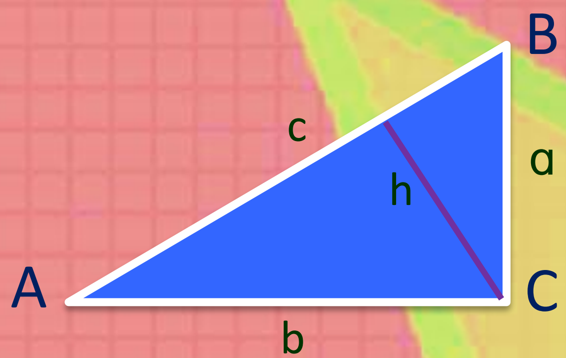
пифагорову тройку

(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15), (8, 1, 17), (12, 16, 20), (15, 20, 25), (7, 24, 25), (10, 24, 26), (20, 21, 29) (18, 24, 30), (16, 30, 34), (21, 28, 35), (12, 35, 37), (15, 36, 39), (24, 32, 40), (9, 40, 41), (27, 36, 45), (14, 48, 50), (30, 40, 50), …



Прямоугольный треугольник

Площадь прямоугольного треугольника

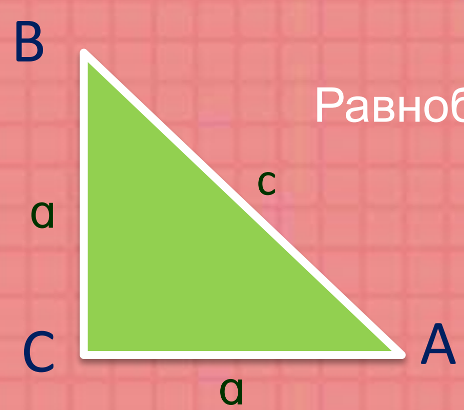


$$S = \frac{1}{2}ab$$

$$S = \frac{1}{2}ch$$

$$S = p \cdot r,$$

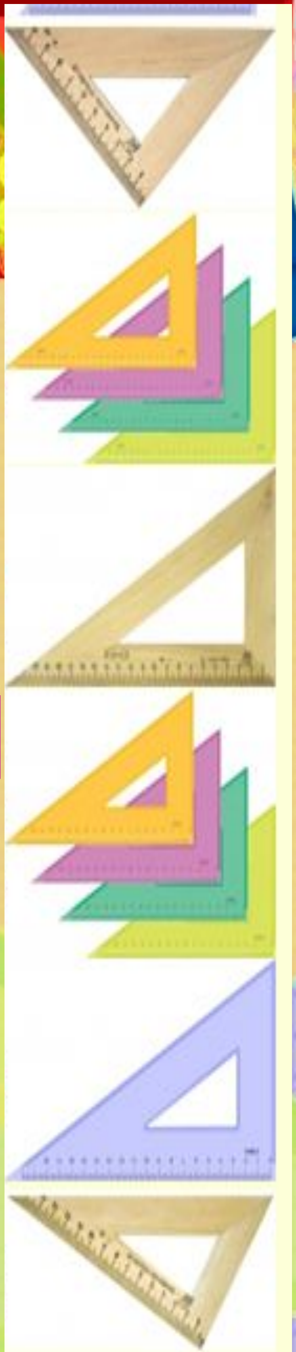
p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности



Равнобедренный прямоугольный треугольник

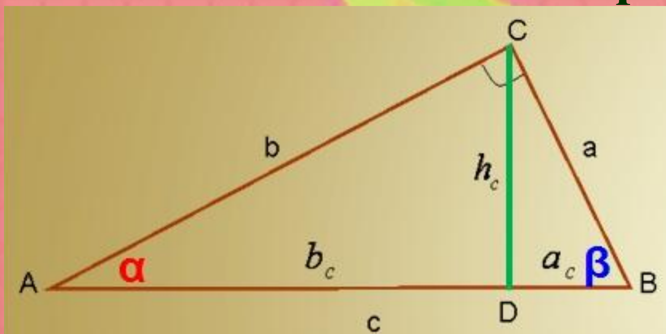
$$S = \frac{1}{2}a^2$$

$$S = \frac{1}{4}c^2$$



Прямоугольный треугольник

Формулы высоты прямого угла в прямоугольном треугольнике



h_c - высота из прямого угла
a, **b** - катеты
c - гипотенуза
b_c, a_c - отрезки полученные от деления гипотенузы, высотой
α, β - углы при гипотенузе

- Формула длины высоты через стороны

$$h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Формула длины высоты через гипотенузу и острые углы

$$h = c \sin \alpha \sin \beta$$

$$h = c \sin \alpha \cos \alpha = c \sin \beta \cos \beta$$

- Формула длины высоты через катет и угол

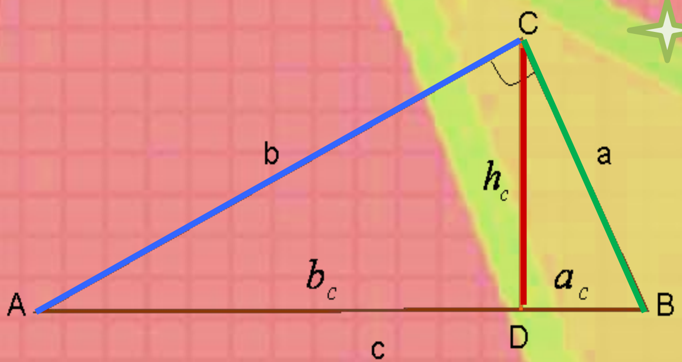
$$h = b \sin \alpha = a \sin \beta$$

- Формула длины высоты через со отрезки гипотенузы

$$h = \sqrt{b_c a_c}$$

Прямоугольный треугольник

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике



Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла есть **среднее пропорциональное (геометрическое)** для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

$$h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$$

Катет прямоугольного треугольника есть **среднее пропорциональное** для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.

$$a = \sqrt{c \cdot a_c} \qquad b = \sqrt{c \cdot b_c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a_c}{b_c}$$

$$c = a_c + b_c$$

Прямоугольный треугольник

Соотношения между сторонами и углами треугольника

$\sin A = \cos B$

$\cos A = \sin B$

$tgA = ctgB$

$ctgA = tgB$

$$\sin A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

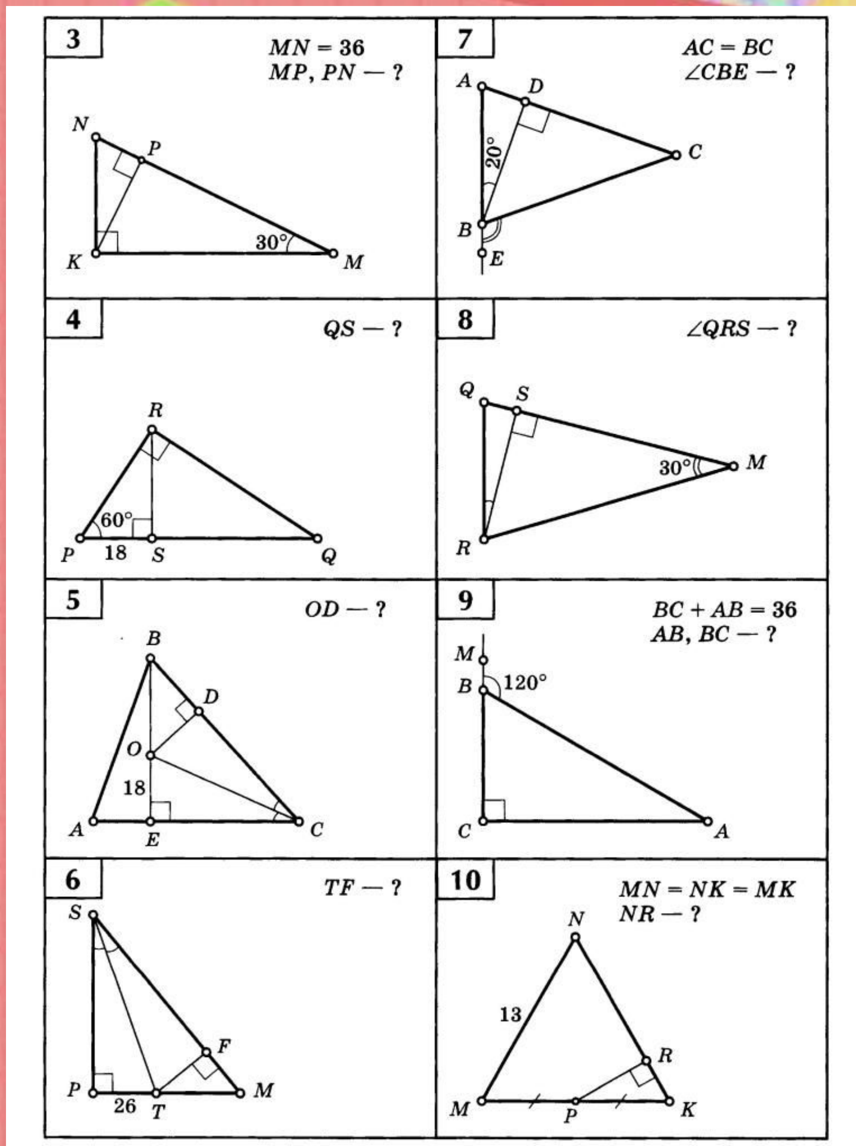
$$\operatorname{tg} A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

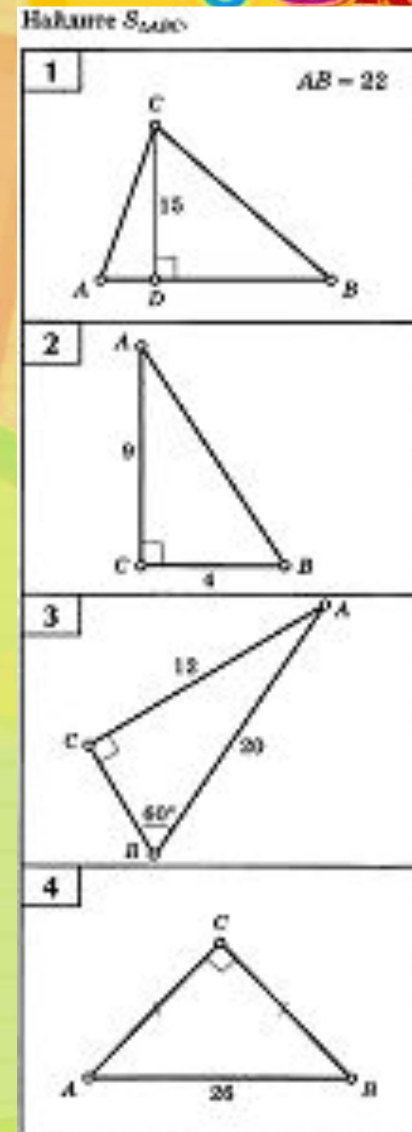
$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}$$

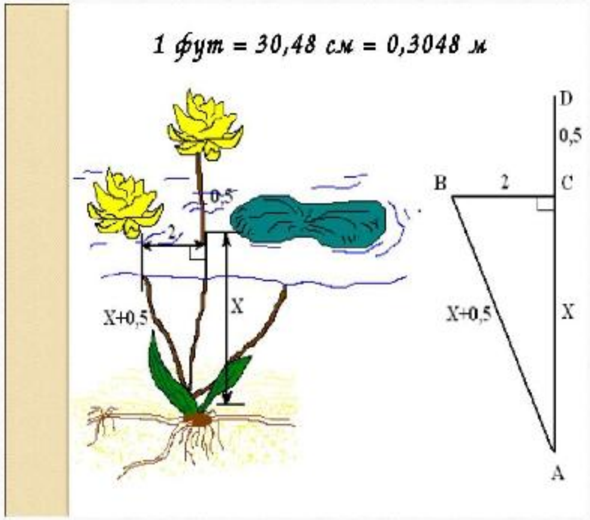
Решение задач на готовых чертежах





Старинные задачи на прямоугольный треугольник

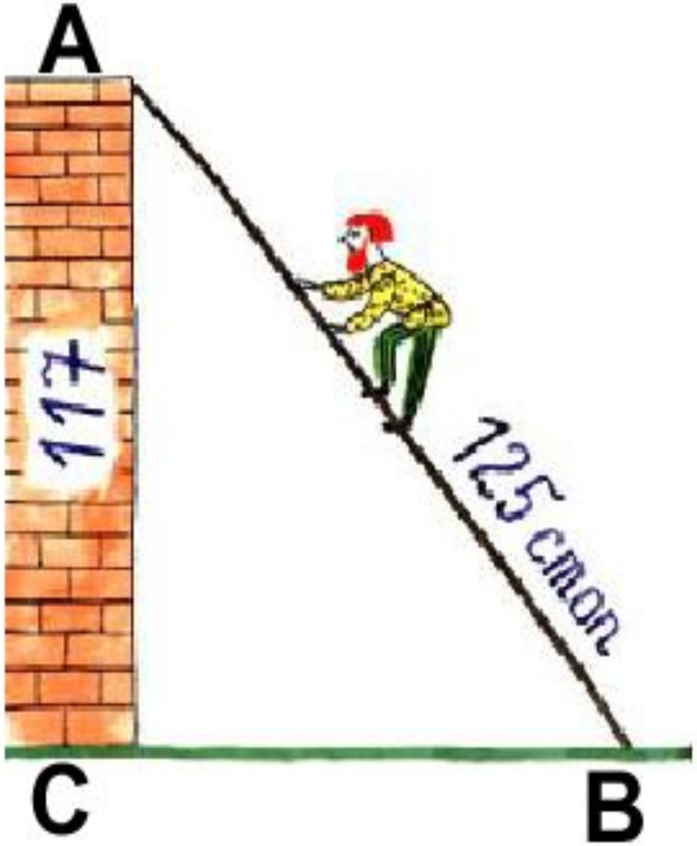
Задача древних индусов



Над озером тихим,
С полфута размером высился лотоса
цвет.
Он рос одиноко. И ветер порывом
Отнес его в сторону. Нет
Боле цветка над водой.
Нашел же рыбак его ранней весной
В двух футах от места, где рос.
Итак, предложу я вопрос:
Как озера вода здесь глубока?

Старинные задачи на прямоугольный треугольник

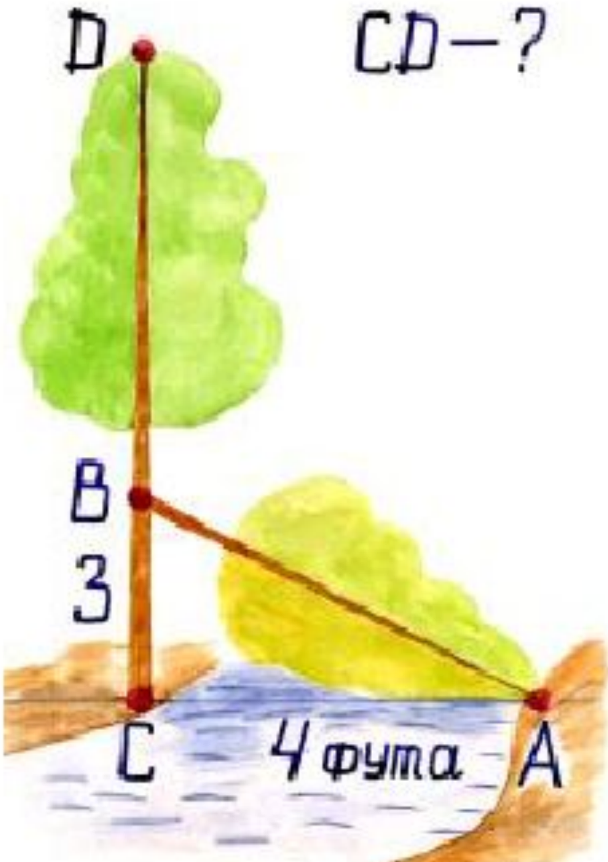
Задача из учебника «Арифметика» Леонтия Магницкого



«Случися некому человеку к стене лестницу прибрати, стены же тоя высота есть 117 стоп. И обреете лестницу долготью 125 стоп. И ведати хочет, колико стоп сея лестницы нижний конец от стены отстояти имать.»

Старинные задачи на прямоугольный треугольник

Задача индийского математика XII века Бхаскары

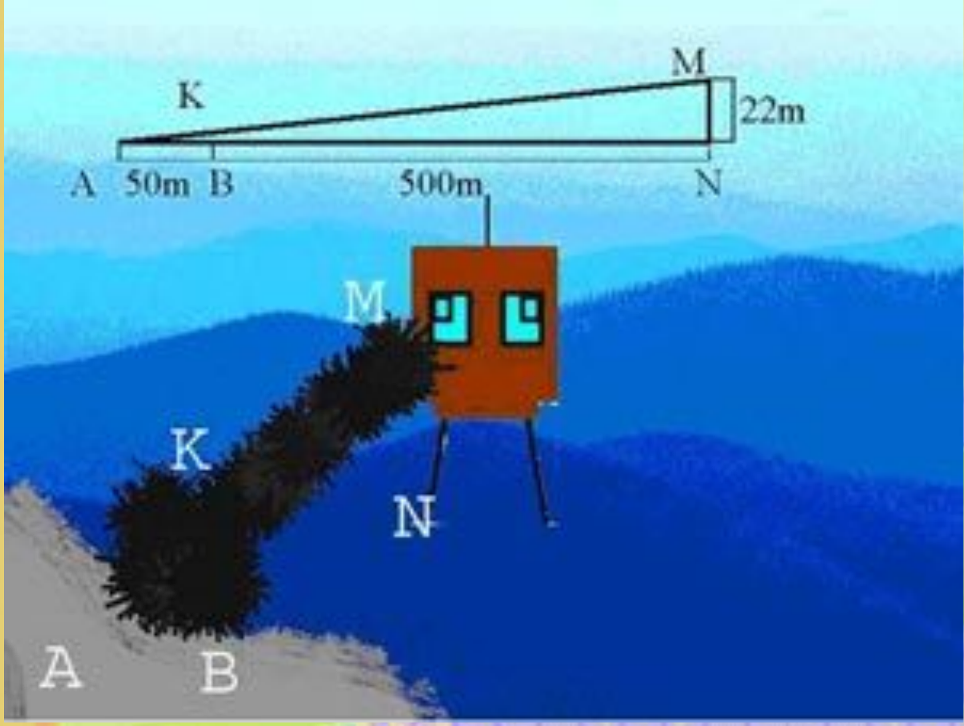


*«На берегу реки рос тополь одинокий.
Вдруг ветра порыв его ствол надломал.
Бедный тополь упал. И угол прямой
С теченьем реки его ствол составлял.
Запомни теперь, что в этом месте река
В четыре лишь фута была широка
Верхушка склонилась у края реки.
Осталось три фута всего от ствола,
Прошу тебя, скоро теперь мне скажи:
У тополя как велика высота?»*

Прикладные задачи

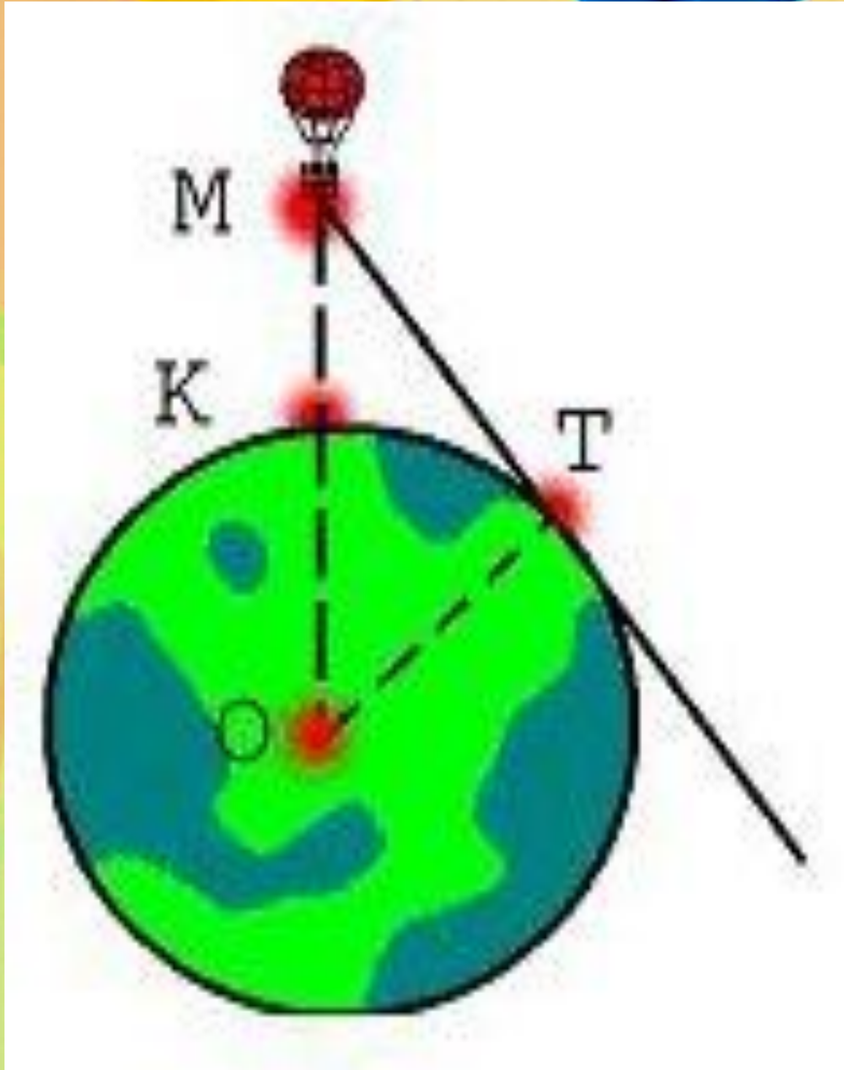
Задача №1. Неприятельская вышка

Открытый участок дороги находится на полосе АВ шириной в 50м; неприятельский наблюдательный пункт находится на верху колокольни высотой MN = 22м. Какой высоты следует сделать вертикальную маску КВ на расстоянии 500м от колокольни, чтобы закрыть дорогу от наблюдателя противника?



Прикладные задачи

Задача №2
Земля как на ладони, когда ты в небе на воздушном шаре
Как далеко видно с воздушного шара, поднявшегося на высоту 4 км над Землей (радиус Земли примерно равен 6370 км)?



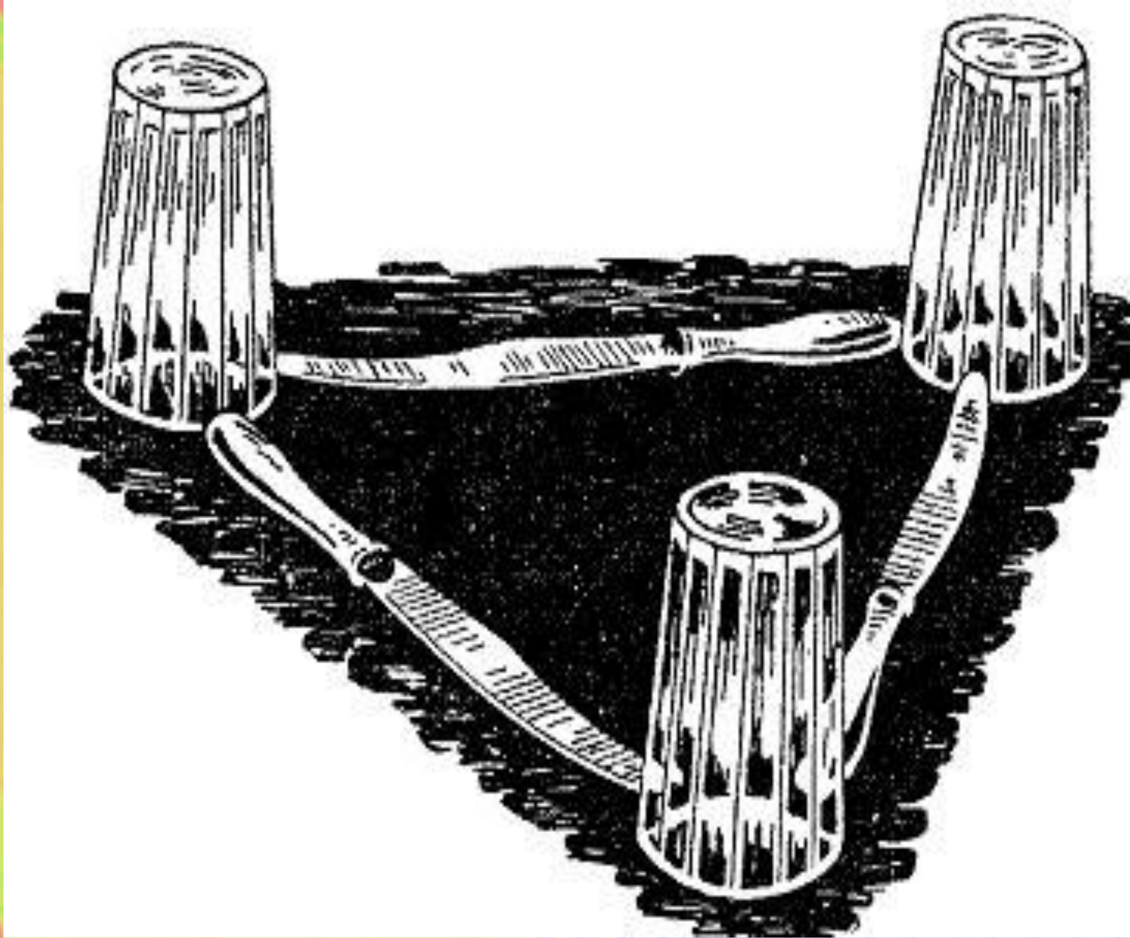
Решение теста

Рефлексия


Это же так просто!
Я это сделаю!
Я могу это сделать!
Я попытаюсь...
Как мне это сделать?
Я хочу это сделать!
Я не могу это сделать (не умею, не получится)
Я не буду этого делать.

Занимательная задача

Три стакана расставлены на столе так, что взаимные их расстояния больше длины каждого из ножей, положенных между ними (рис.). Тем не менее требуется устроить из этих трех ножей мосты, которые соединяли бы все три стакана. Само собой разумеется, что сдвигать стаканы с места запрещается; нельзя также пользоваться чем-либо другим, кроме трех стаканов и трех ножей



Спасибо за внимание