

Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Актуальность

Так как я ученик 11 класса, и в этом году сдаю ЕГЭ по математике на профильном уровне, то мне необходимо знать способы отбора корней и уметь их применять при решении 13 задания. Так же я могу помочь одноклассникам при выполнении этого задания.

● **Цель работы:** изучить различные способы отбора корней в тригонометрических уравнениях на промежутке $[a; b]$.

Задачи: 1. Изучить литературу по способам отбора корней принадлежащих промежутку $[a; b]$ при решении тригонометрических уравнений;

2. Рассмотреть особенности каждого найденного способа;

3. Научиться определять наиболее рациональный способ отбора корней из промежутка $[a; b]$ при решении тригонометрических уравнений;

4. Показать практическое применение полученных знаний и оценить степень сложности в использовании различных способов.

5. Познакомить одноклассников с рациональными способами отбора корней из промежутка $[a; b]$ при решении тригонометрических уравнений.

● **Объект исследования:** корни тригонометрического уравнения, принадлежащие промежутку $[a; b]$.

Предмет исследования: способы отбора корней, принадлежащих промежутку $[a; b]$, при решении тригонометрических уравнений.

Методы исследования:

1. Анализ;
2. Сравнение;
3. Экспериментальное подтверждение.

Гипотеза

- Чем я лучше научусь отбирать корни, принадлежащие промежутку $[a; b]$, при решении тригонометрических уравнений, используя рациональные способы отбора корней, тем больше времени у меня останется на решение остальных заданий для получения большего количества баллов при оценке работы ЕГЭ по математике на профильном уровне.

Способы отбора корней

- Арифметический;
- Алгебраический;
- Геометрический;
- Графический.

Арифметический способ

Пример. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x = \sqrt{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;

б) Найдите все корни уравнения на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение. а) Решив это уравнение, я получила следующие корни: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

б) Теперь найдем все корни этого уравнения на заданном отрезке способом перебора.

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 0, x = \frac{\pi}{2} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 2, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 3, x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 0, x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 1, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n = \frac{17\pi}{6} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$n = 2, x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6} \notin \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$$

$$\bullet x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 0, x = -\frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$$

$$n = 1, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n = \frac{7\pi}{6} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$$

$$n = 2, x = -\frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{19\pi}{6} \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}$$

- преимущества арифметического способа: определяет точное количество корней уравнения на данном промежутке и их значение.
- Недостатки: иногда приходится долго перебирать значение n , для того чтобы определить все значения из указанного промежутка.

Алгебраический способ

Решив уравнение, я получила корни: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

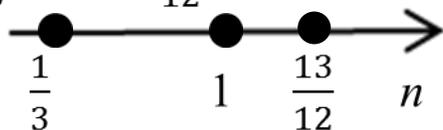
При помощи двойного неравенства определяем значение n . На координатной прямой отмечаем эти значения и между ними находим целые числа.

$$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi n \leq 3\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{4\pi}{6 \cdot 2\pi} \leq \frac{2\pi n}{2\pi} \leq \frac{13\pi}{6 \cdot 2\pi}$$

$$\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{13}{12}$$



$$n=1, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi$$

$$\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi n \leq 3\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{14\pi}{6} \leq 2\pi n \leq \frac{23\pi}{6}$$

$$\frac{14\pi}{6 \cdot 2\pi} \leq \frac{2\pi n}{2\pi} \leq \frac{23\pi}{6 \cdot 2\pi}$$

$$\frac{7}{6} \leq n \leq \frac{23}{12}$$



$$n = \emptyset, n \in \mathbb{Z}$$

Когда мы нашли целое значение n , подставляем его в найденные корни уравнения и получим корни это уравнения на данном промежутке.

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$$

Также решаем дальше.

$$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 3\pi$$

$$n = 1; 2$$

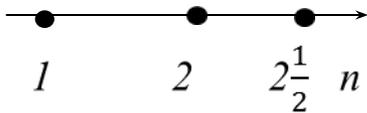
$$\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leq \pi n \leq 3\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$n = 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{2\pi} \leq \frac{\pi n}{\pi} \leq \frac{5\pi}{2\pi}$$

$$n = 2, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$1 \leq n \leq 2\frac{1}{2}$$



Ответ: $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}$

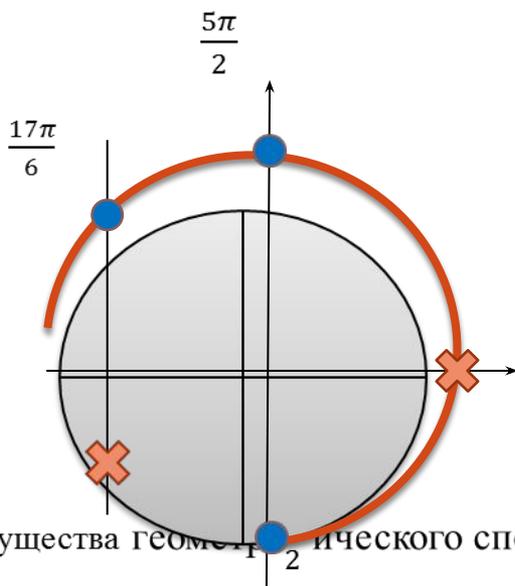
- Преимущества алгебраического способа: по рисунку видно количество корней и их значения.
- Недостатки: такой способ может дать ошибку при определении корней, если неправильно использовать период.

Геометрический способ

При решении уравнения я получила $\cos x = 0$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Далее отбираю корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ с помощью единичной окружности. Для этого на ней отмечаю дугу равную данному отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ и точки пересечения прямых $x=0$ и $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ с построенной дугой.

Таким образом, корнями, принадлежащими данному отрезку являются числа

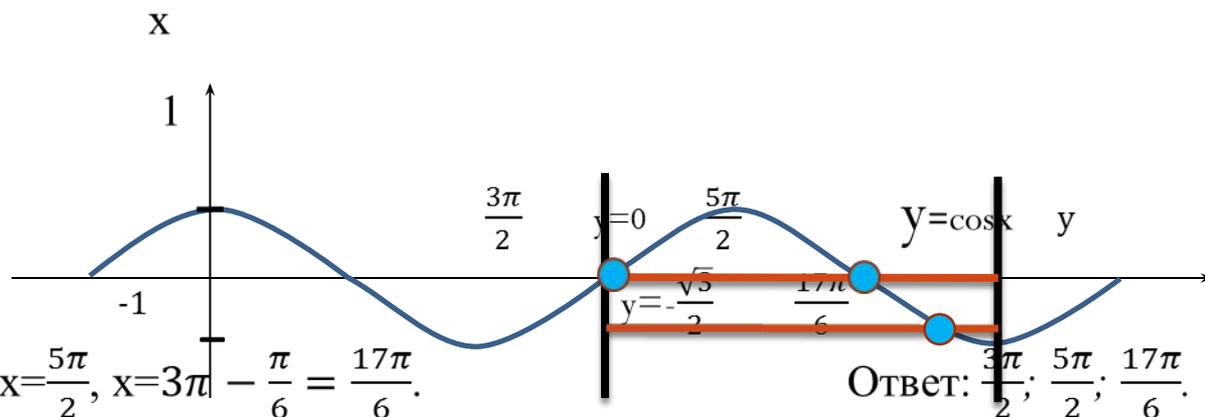
$$\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}.$$



- Преимущества геометрического способа: по рисунку видно количество корней и их значения.
- Недостатки: такой способ может дать ошибку при определении корней, если неправильно использовать период.

Графический способ

При решении уравнения я получила $\cos x = 0$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Выполняю построение графиков функций $y = \cos x$, $y = 0$ и $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ определяем промежуток $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ на котором нужно отобрать корни. Определяем значения x , соответствующие точкам пересечения построенных графиков функций.



- Преимущества графического способа: сразу видно количество корней и легко можно определить их значения.
- Недостатки: много времени уходит на построение графиков функций, без бумаги в клетку могут возникнуть неточности в построении графиков и соответственно неверное определение корней уравнения.

Практическая часть

Пример 1. а) Решить уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = 0, x = \frac{\pi}{2} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

$$n = 0, x = \frac{\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

$$n = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

$$n = 1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

$$n = 2, x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

$$n = 2, x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

$$n = 3, x = -\frac{\pi}{4} + 3\pi = \frac{11\pi}{4} \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

$$n = 4, x = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4} \notin \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

Ответ: $\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}$.

а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} - 2 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

● $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

• $n=0, x=0 \in [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

• $n=-1, x=-2\pi \notin [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

• $n=-2, x=-4\pi \in [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

• $n=-3, x=-6\pi \notin [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

• $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

• $n=0, x = \frac{2\pi}{3} \notin [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

$x = -\frac{2\pi}{3} \notin [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$;

• $n=-1, x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3} \notin [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

$x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{8\pi}{3} \in [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$;

• $n=-2, x = \frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{10\pi}{3} \in [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

• $x = -\frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{14\pi}{3} \in [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$;

• $n=-3, x = \frac{2\pi}{3} - 6\pi = -\frac{16\pi}{3} \in [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

• $x = -\frac{2\pi}{3} - 6\pi = -\frac{20\pi}{3} \notin [-5\pi; -\frac{7\pi}{3}]$

• Ответ: $-\frac{10\pi}{3}; -4\pi; -\frac{8\pi}{3}; -\frac{14\pi}{3}$

Пример 2. а) Решите уравнение $2 \sin^4 x + 3 \cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

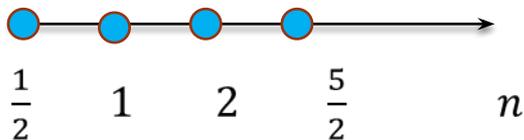
а) $x = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 3\pi$

$$\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi n \leq 3\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{5}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \pi n \leq \frac{5\pi}{2}$$



$$n = 1, 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

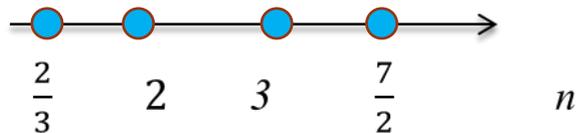
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\pi \leq -\frac{\pi}{2} + \pi n \leq 3\pi$$

$$\pi + \frac{\pi}{2} \leq \pi n \leq 3\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \pi n \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{3}{2} \leq n \leq \frac{7}{2}$$



$$n = 2, 3$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

● Пример 3. а) Решить уравнение $(16^{\sin x})^{\cos x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3} \sin x}$.

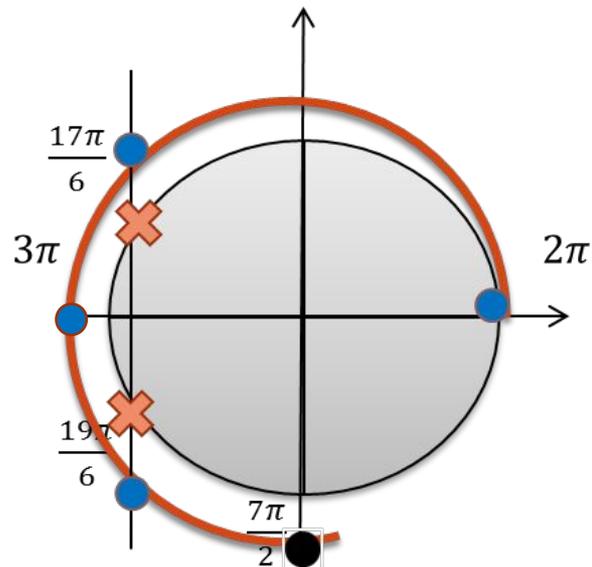
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащего промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

$$\sin x = 0$$

Прямые $y=0$, $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

а) $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

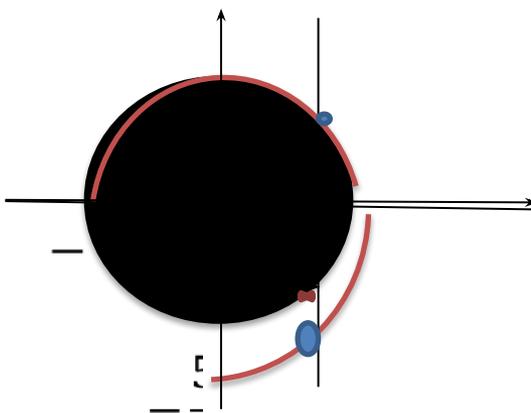
б)



Ответ: $2\pi; \frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$

а) Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; -\frac{5\pi}{2}]$



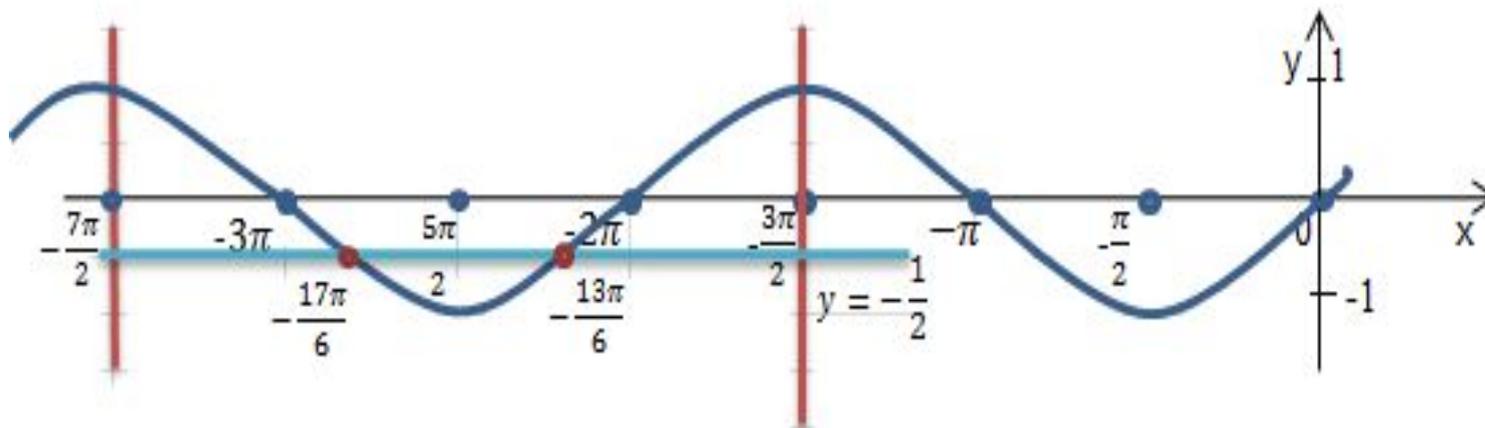
Ответ: $-2\pi + \arccos \frac{2}{5}; -2\pi - \arccos \frac{2}{5}$.

Пример 4. а) Решите уравнение $6\sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

а) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) Отберем корни этого уравнения при помощи графика функций. Выполняем построение графика функций $y = \sin x$ и $y = -\frac{1}{2}$



• Ответ: $-\frac{13\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}$

Пример 3. а) Решите уравнение $7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

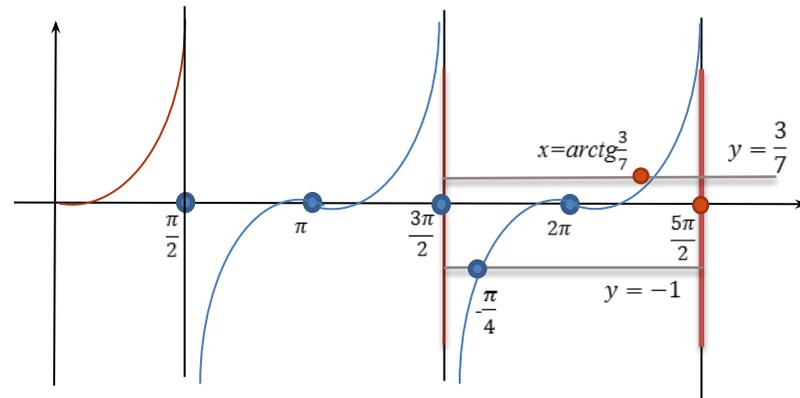
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

● $\operatorname{tg} x = \frac{3}{7}$

● $\operatorname{tg} x = -1$

- б) Находим корни уравнения из числового промежутка $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ с помощью графика функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -1, y = \frac{3}{7}$

- Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}; x = -\frac{\pi}{4}$.



Вывод

- Изучив литературу по способам отбора корней принадлежащих промежутку $[a; b]$, я рассмотрела 4 способа отбора корней и достоинства и недостатки каждого. Научилась определять и применять наиболее рациональный способ отбора корней тригонометрических уравнений на заданном промежутке. А также я познакомил одноклассников с этими способами отбора корней.

**Спасибо за
внимание**

