

Тригонометрические функции любого угла.

Определения синуса, косинуса, тангенса
и котангенса.



Место урока в теме: первый урок по теме.

Цели урока:

- формирование понятий тригонометрических функций \sin , \cos , \tan , \cotg угла и некоторых свойств этих функций;
- научить строить угол произвольной градусной меры и определять принадлежность угла к координатной четверти;
- научить находить по значению одной тригонометрической функции остальные функции, используя основное тригонометрическое тождество;
- развитие умения делать обобщающие выводы.

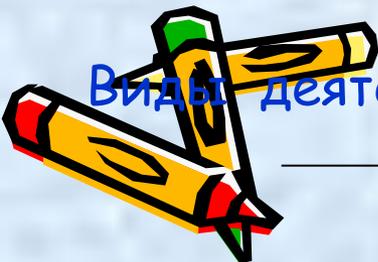
Тип урока: комбинированный урок, т.е. изучения нового материала и формирование умений на базе нового материала.

Метод: диалогическое изложение материала с использованием ИТ, с репродуктивным решением стереотипных задач.

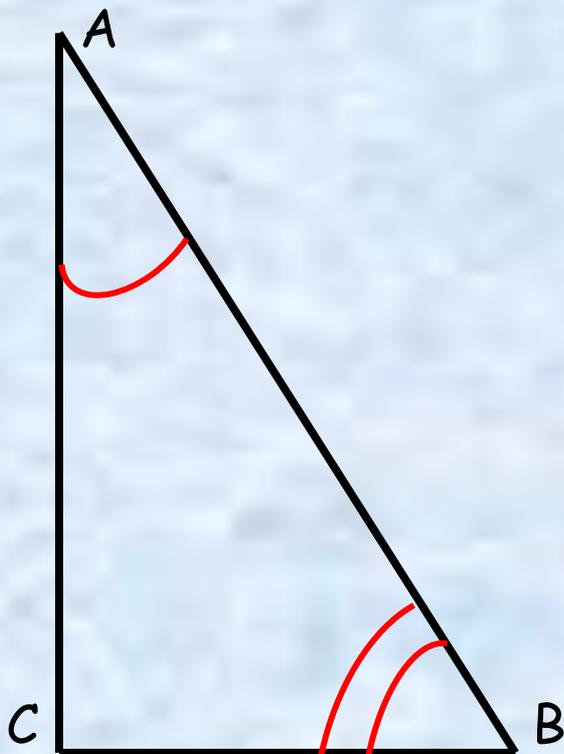
Структура урока:

1. Актуализация знаний.
2. Формирование новых понятий и способов действий.
3. Формирование умений и навыков.

Виды деятельности: групповая, индивидуальная (учитывая особенности класса).



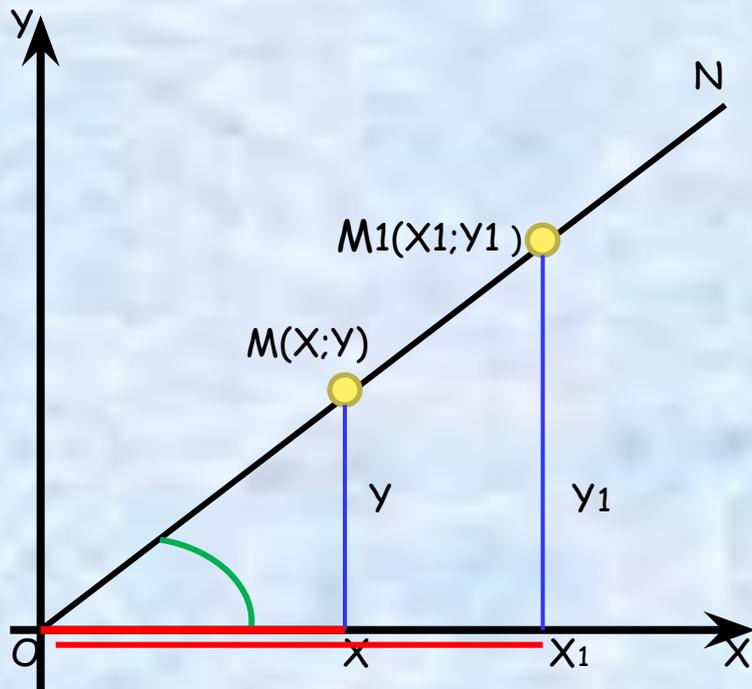
Геометрическое определение функций синуса, косинуса, тангенса, котангенса острого угла прямоугольного треугольника.



- **Синусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
• $\text{Sin } A = BC/AB, \text{ Sin } B = AC/AB.$
- **Косинусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
• $\text{Cos } A = AC/AB, \text{ Cos } B = CB/AB.$
- **Тангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.
• $\text{tg } A = CB/AC, \text{ tg } B = AC/CB.$
- **Котангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.
• $\text{ctg } A = AC/CB, \text{ ctg } B = CB/AC.$
- **Задание №1.** Экзаменационный сборник ГИА 2014г №2.5.3; №2.5.9.



Почему эти отношения
назвали
тригонометрическими
функциями углов?



Точка М перемещается по лучу ON, занимая последовательно положения М(Х,У) и М1(Х1; У1). Треугольники МХО и М1Х1О - подобны по теореме Фалеса, следовательно их сходственные стороны пропорциональны.

$$Y/OM = Y1/OM1 = \sin (NOX)$$

$$X/OM = X1/OM1 = \cos (NOX)$$

$$Y/X = Y1 /X1 = \operatorname{tg} (NOX)$$

$$X/Y = X1 /Y1 = \operatorname{ctg} (NOX)$$

Рассматриваемые отношения не зависят от расстояния точки М до начала координат, а зависят только от величины угла поворота NOX.

Существует однозначное соответствие между углами поворота луча ON и величинами приведённых отношений.

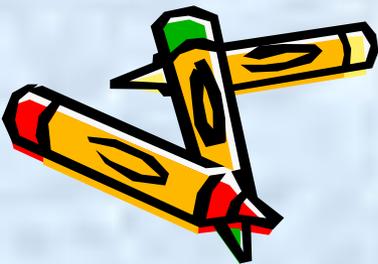
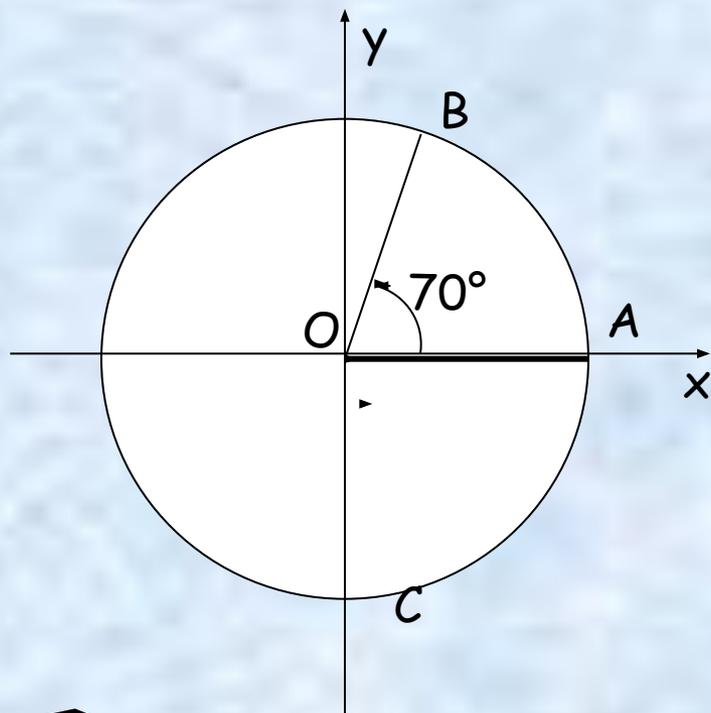
Вывод: Эти отношения можно считать функциями угла поворота NOX и их называют **тригонометрическими функциями**, а расстояние точки М от начала координат можно принять равным «1».



Построим окружность единичного радиуса с центром в начале прямоугольной системы координат, т.е. точке $(0;0)$.

Радиус $R=1$. Ось Ox - ось абсцисс; ось Oy - ось ординат.

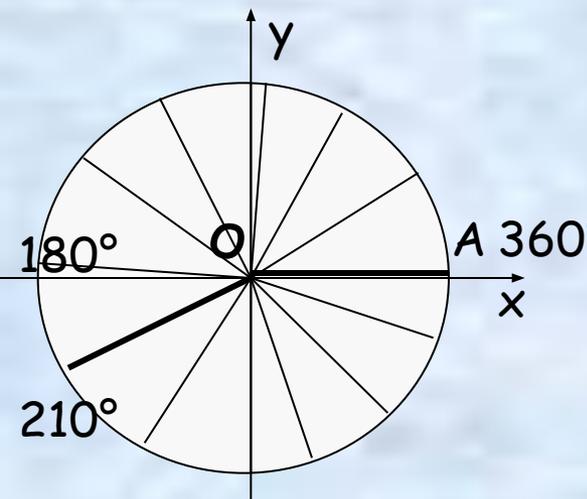
Повернем R на 70° против часовой стрелки вокруг точки O .



Существует бесконечное
множество углов поворота.



Так, если начальный радиус OA повернуть на 180° , а потом еще на 30° , то угол поворота будет равен 210° .

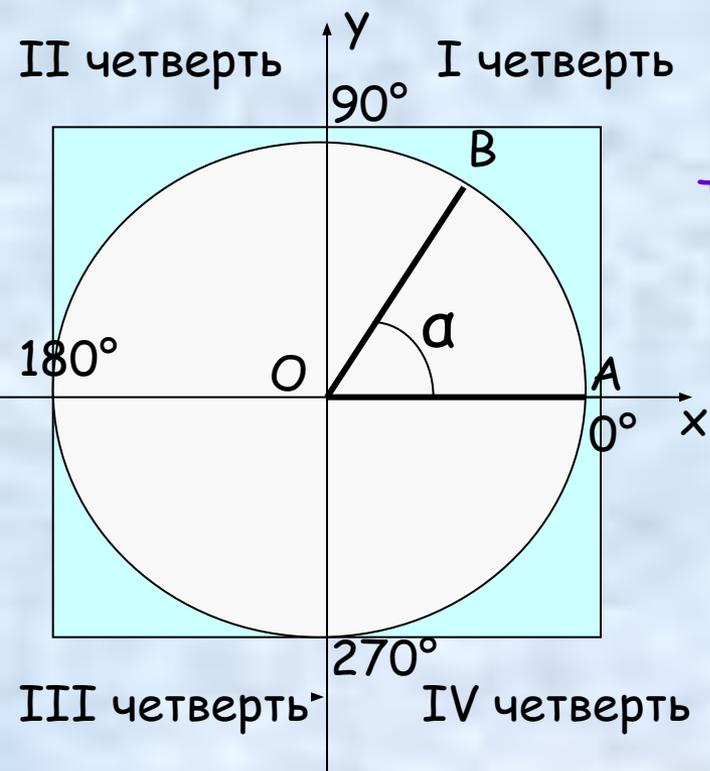


Если начальный радиус OA сделает полный оборот против часовой стрелки, то угол поворота будет равен 360° .

Если начальный радиус сделает полный оборот по часовой стрелке, то угол поворота будет равен $(- 360^\circ)$.

Вывод: угол поворота может выражаться каким угодно числом градусов от $-\infty$ до $+\infty$.





- Так, если $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то угол в I четверти;
- если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то угол во II четверти;
- если $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, то угол в III четверти;
- если $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, то угол в IV четверти.

Углы $0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ, \pm 360^\circ$ не относятся ни к какой четверти.

Задание №2. В какой четверти находится угол 420° ? Чему равен синус этого угла?

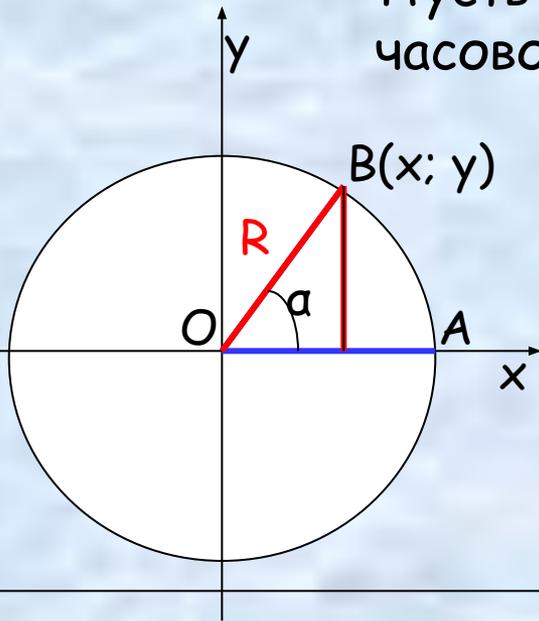
т.к. $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$ и $0^\circ < 60^\circ < 90^\circ$, то этот угол лежит в I четверти.

Пользуясь таблицей значений тригонометрических функций, находим: синус 60° равен $\sqrt{3}/2$.



Тригонометрические определения функций синуса, косинуса, тангенса, котангенса

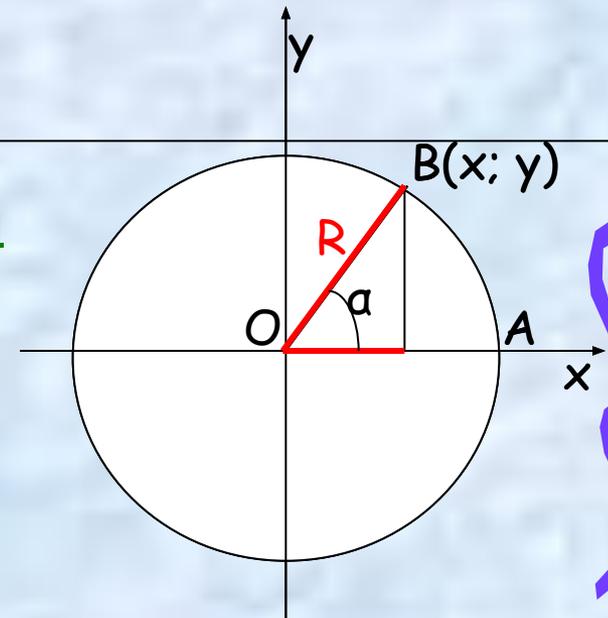
Пусть $R = OA = 1$. Повернём радиус на угол α против часовой стрелки относительно точки $(O; 0)$



Синусом угла α называется ордината точки единичной окружности, соответствующая углу поворота α .

$$\text{Sin} \alpha = Y / R = Y$$

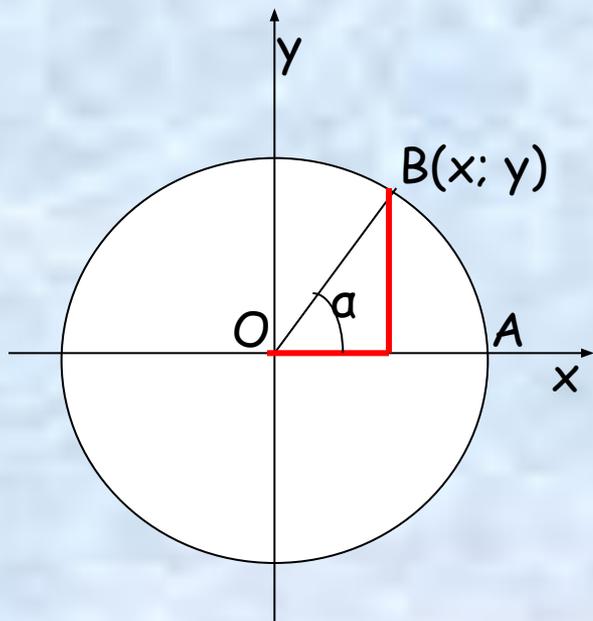
Косинусом угла α называется абсцисса точки единичной окружности, соответствующая углу поворота α .



$$\text{Cos} \alpha = X / R = X$$



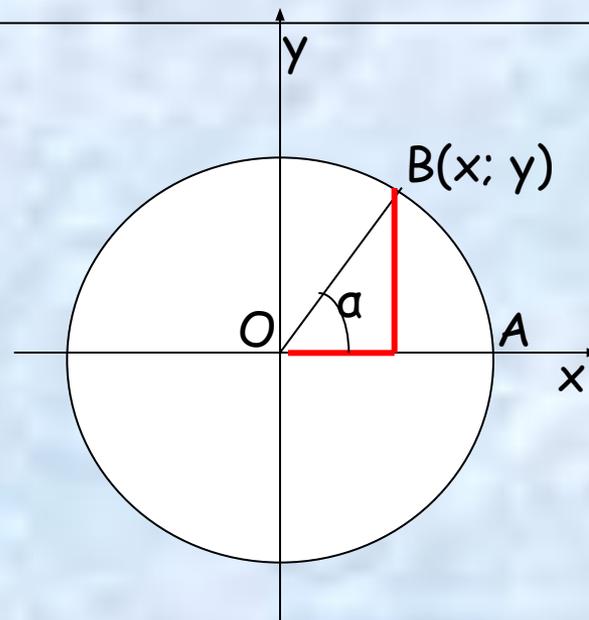
Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки В к ее абсциссе.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

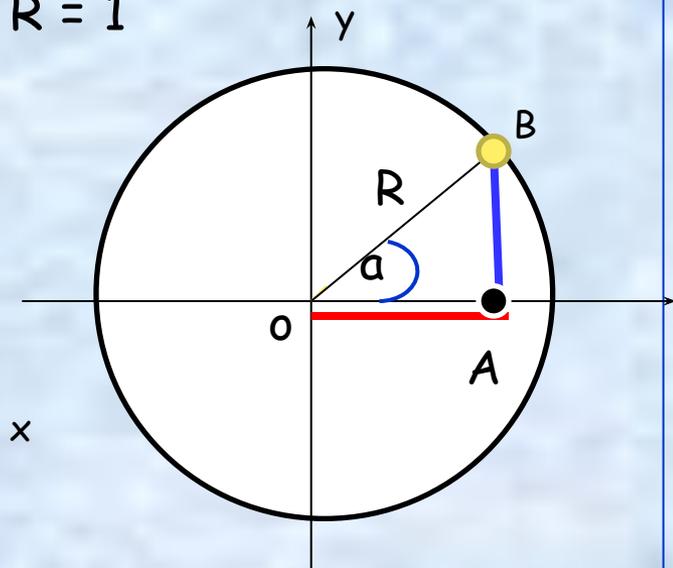
Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки В к ее ординате.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$



Основное тригонометрическое тождество (ОТТ)

$R = 1$



Задание №3

Вычислить $\cos \alpha$, если
 $\sin \alpha = 1/2$ и угол находится
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, т.е. во второй
четверти.



По теореме Пифагора для
треугольника AOB имеем:

$OB^2 = OA^2 + AB^2$, так как $OB = 1$,
 $AO = \cos \alpha$,
 $AB = \sin \alpha$, то

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

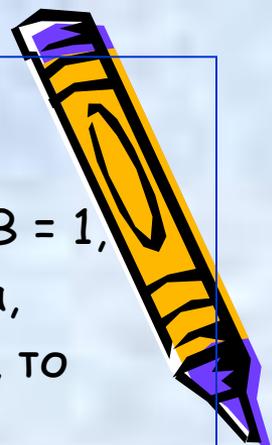
$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - (1/2)^2} = -\sqrt{1 - 1/4} = \\ &= -\sqrt{3/4} = -\sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

Вывод: Выбор знака перед корнем
определяется знаком функции, стоящей
в левой части.



Решаем варианты заданий из сборника ГИА 2014года

Задания №2.5.1 Дано: $\triangle ABC$, угол $C = 90^\circ$, $\sin a = \sqrt{3}/2$.

Найти: $\cos a$ -?

По ОТТ имеем $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - (\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{1 - 3/4} = \sqrt{1/4} = 1/2 = 0,5$ Угол $a = 60^\circ$.

Задание №2.5.6 Дано: $\triangle ABC$, угол $C = 90^\circ$, $\cos a = \sqrt{2}/4$.

Найти: $\operatorname{tg} a$ -?

По ОТТ имеем $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - (\sqrt{2}/4)^2} = \sqrt{1 - 2/16} = \sqrt{14/16} = \sqrt{14}/4$.

$\operatorname{tg} a = \sin a : \cos a = \sqrt{14}/4 : \sqrt{2}/4 = \sqrt{14} : \sqrt{2} = \sqrt{7}$.

Задание № 2.5.8 Дано: $\triangle ABC$, угол $C = 90^\circ$, $\sin a = 5/\sqrt{41}$.

Найти: $\operatorname{ctg} \beta$ -?

Так как, $\operatorname{ctg} \beta = \cos \beta : \sin \beta$ и $\cos \beta = \sin a = 5/\sqrt{41}$ по определению функций, то $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - (5/\sqrt{41})^2} = \sqrt{16/\sqrt{41}} = 4/\sqrt{41}$.

Тогда $\operatorname{ctg} \beta = (5/\sqrt{41}) : (4/\sqrt{41}) = 5:4 = 1,25$



Спасибо за хорошую работу !