

Основные методы построения графиков функций

Изучение действий функций и построение их графиков является важным разделом математики.

Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решить многие задачи и порой является единственным средством их решения.

Схема исследования функции при построении графика

Область определения функции – множество значений аргумента, при которых функция задана, определена.

Геометрически – это проекция графика функции на ось x

Пример

Нули функции – это точки, в которых функция обращается в нуль.

Геометрически – это абсциссы точек пересечения графика функции с осью x

Пример

Промежутки постоянного знака – множества решений неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$

Геометрически – это интервалы оси x , соответствующие точкам графика, лежащим выше (или ниже) этой оси

Пример

Промежутки монотонности – промежутки оси x , на которых функция возрастает или убывает

Геометрически – это интервалы оси x , где график функции идет вверх или вниз

Пример

Точки экстремума – точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значения по сравнению со значениями в близких точках

Геометрически – около точек экстремума график функции выгибается выпуклостью вверх или вниз

Пример

Говорят, что в точке x_0 функция f принимает наибольшее (наименьшее) значение, если для любого значения x . Само число и называется наибольшим (наименьшим) значением функции.

Геометрически – это ординаты самой высокой (самой низкой) точки графика.

Пример

Область значений функции – множество чисел, состоящее из всех значений функции.

Геометрически – это проекция графика функции на ось y .

Пример

При рассмотрении графиков многих функций часто можно избежать проведения подобного исследования, используя ряд методов, упрощающих аналитическое выражение функции и облегчающих построение графика.

Параллельный перенос

Перенос (сдвиг) вдоль оси ординат

Пусть требуется построить график $y=f(x)+b$. Ординаты этого графика для всех значений аргумента на b единиц больше соответствующих ординат графика $y=f(x)$ при $b>0$ и на b единиц меньше при $b<0$. График функции $y=f(x)+b$ можно получить параллельным переносом вдоль оси ординат графика функции $y=f(x)$ на b единиц вверх при $b>0$ или вниз при $b<0$.

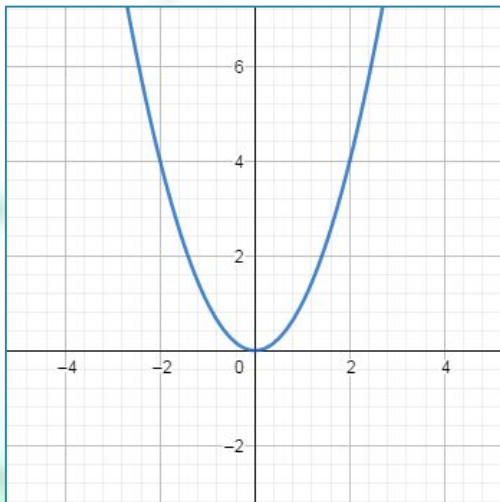


Рис.
1

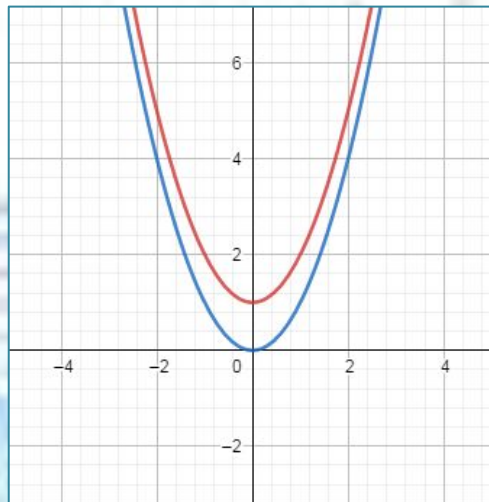


Рис.
2

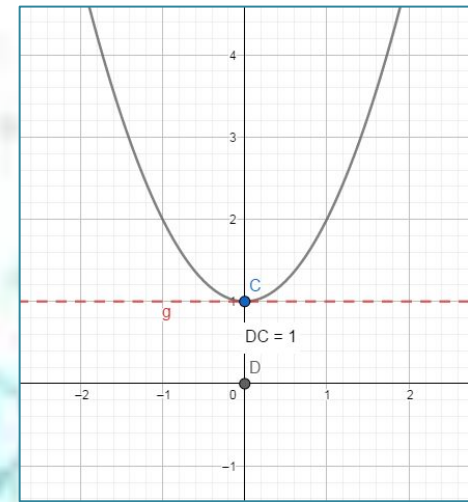


Рис.
3

Пример 1. Построить график функции $y = 2^x + 3$.

Решение. Строим график функции $y = 2^x$ и переносим ось абсцисс на 3 единицы вниз. Получаем график функции $y = 2^x + 3$ (рис. 4). Прямая $y = 3$ является горизонтальной асимптотой. График пересекает ось ординат в точке $(0;4)$.

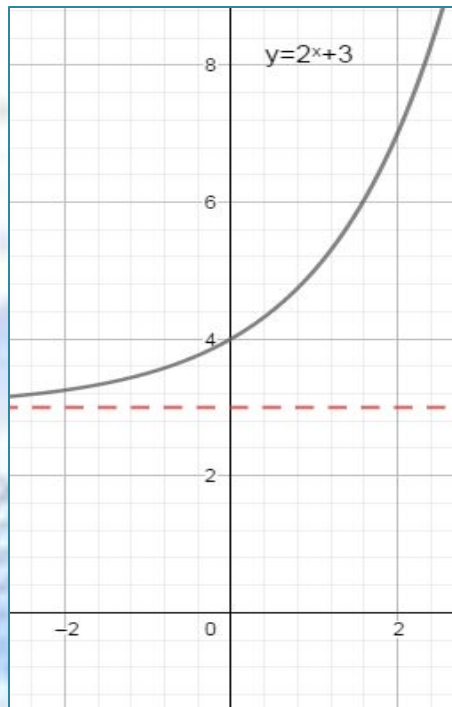


Рис.4

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{4}$

Решение. Строим график функции $y = \frac{1}{x}$ и переносим ось абсцисс на $5/4$ единиц вверх. Получаем график функции $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{4}$ (рис. 5). Прямая $y = -\frac{5}{4}$ является горизонтальной асимптотой. График пересекает ось абсцисс в точке $(\frac{4}{5}, 0)$

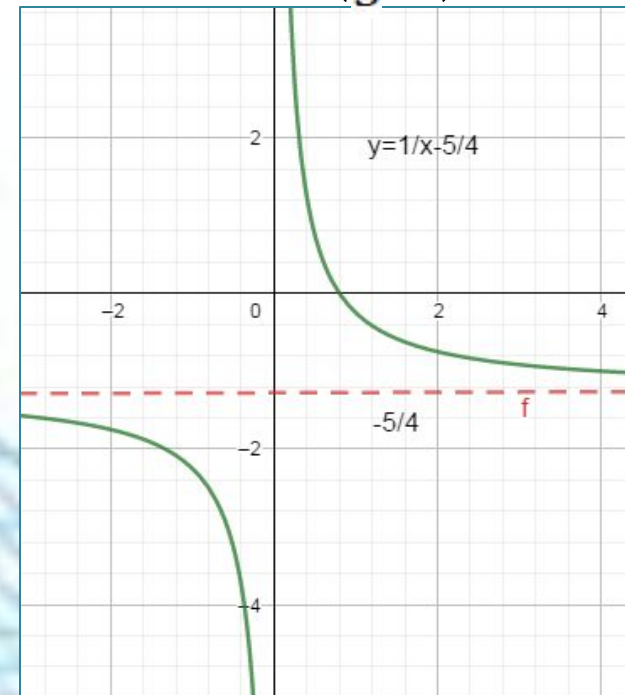


Рис.5

Перенос вдоль оси абсцисс

Для построения графика функции следует построить график функции $y=f(x)$ и перенести ось ординат на a единиц вправо при $a>0$ и на a единиц влево при $a<0$. Полученный в новой системе координат график является графиком функции $y=f(x+a)$.

Пример 3. Построить график функции $y = \log_2(x + 2)$

Решение. Строим график функции $y = \log_2 x$

Переносим ось ординат на 2 единицы вправо, и в полученной таким образом системе координат имеем график функции $y = \log_2(x + 2)$

Прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой. График пересекает ось абсцисс в точке $x=-1$, а ось ординат - в точке $y=1$ (рис.6).

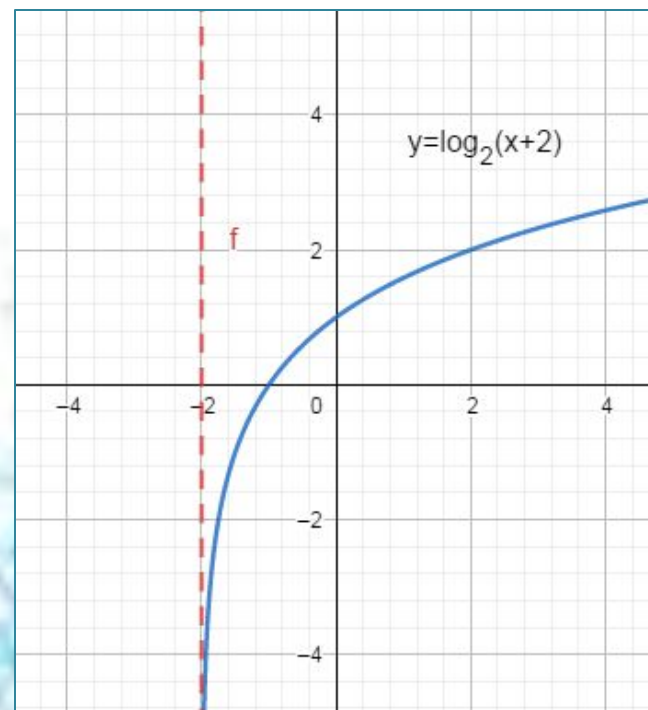


Рис.
6

Пример 4. Построить график функции $y = \sin(x - \sqrt{2})$

Решение. Строим график функции $y = \sin x$

Переносим ось ординат на $\sqrt{2}$ единиц влево и во вновь полученной системе координат имеем график функции $y = \sin(x - \sqrt{2})$ (рис.7). Координаты точек пересечения графика с осью абсцисс находим из условия $y = \sin(x - \sqrt{2}) = 0$ откуда $x = \sqrt{2} + \pi k$

, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

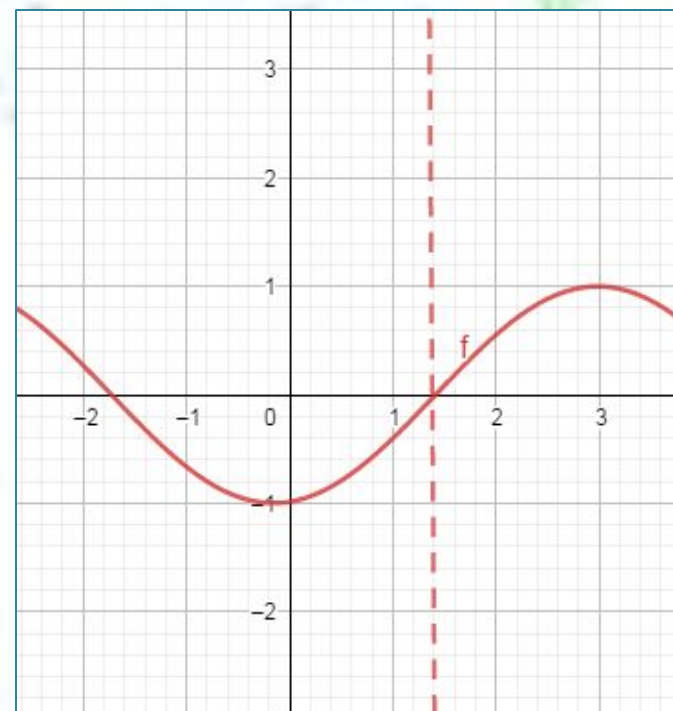


Рис.
7

Отражение

Построение графика функции вида $y=f(-x)$

Для построения графика функции $y=f(-x)$ следует построить график функции $y=f(x)$ и отразить его относительно оси ординат.

Полученный график является графиком функции $y=f(-x)$.

Пример 5. Построить график функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$

Решение. Строим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}}x$

и отражаем его относительно ординат. Получаем график функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ (рис.8).

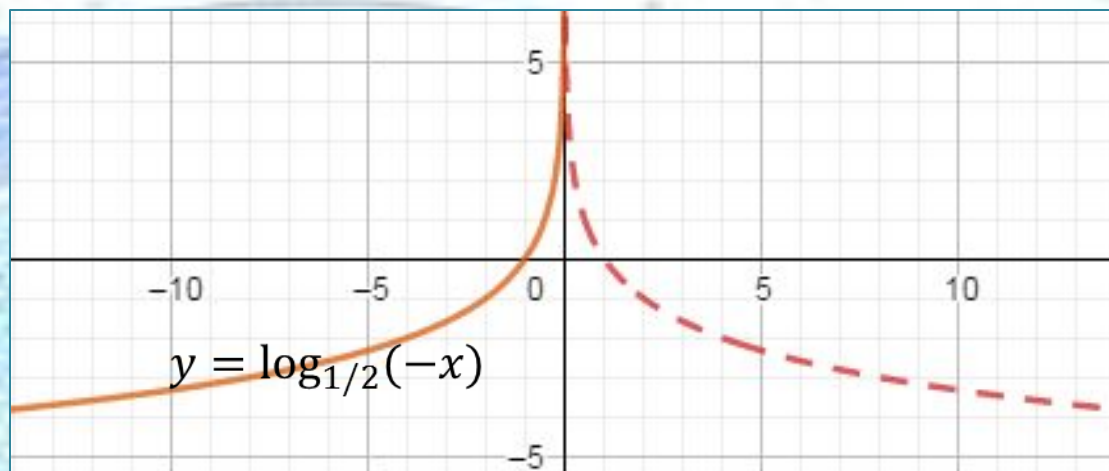


Рис.

Построение графика функции вида $y=-f(x)$

Для построения графика функции $y=-f(x)$ следует построить график функции $y=f(x)$ и отразить его относительно оси абсцисс.

Пример 6. Построить график функции $y= -\cos x$.

Решение. Строим график функции $y= \cos x$ (рис.9) и, отражая его относительно оси абсцисс, получаем график функции $y= -\cos x$.

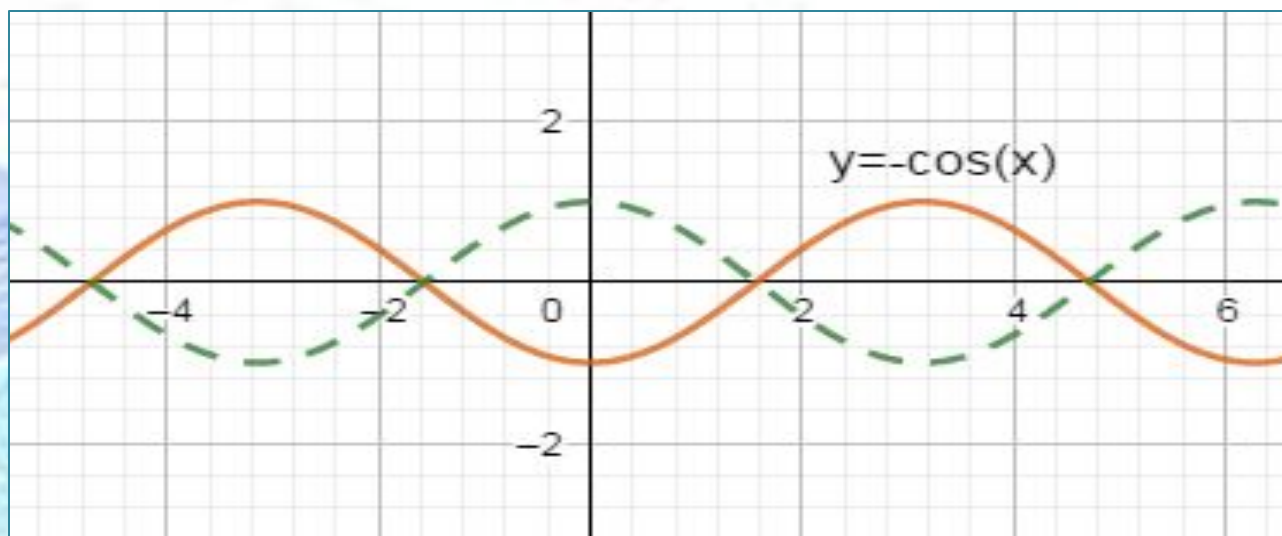


Рис.

Построение графиков чётной и нечётной функций

Для построения графика четной функции $y=f(x)$ следует построить ветвь графика этой функции только в области положительных значений аргумента $x \geq 0$. График функции $y=f(x)$ в области отрицательных значений аргумента симметричен построенной ветви относительно оси ординат и получается отражением ее относительно этой оси.

Для построения графика нечетной функции следует строить ветвь графика этой функции только в области положительных значений аргумента ($x \geq 0$). График функции $y=f(x)$ в области отрицательных значений аргумента симметричен построенной ветви относительно начала координат с последующим отражением в области отрицательных значений x относительно оси абсцисс.

Пример 8. Построить график функции $y = \frac{|x|}{x^2}$

Решение. Данная функция – четная, поэтому достаточно построить ее график лишь в области положительных значений x . При $x > 0$ исходная функция имеет вид $y = \frac{1}{x}$

График функции $y = \frac{|x|}{x^2}$ в области отрицательных значений x получаем отражением относительно оси ординат (рис.11).

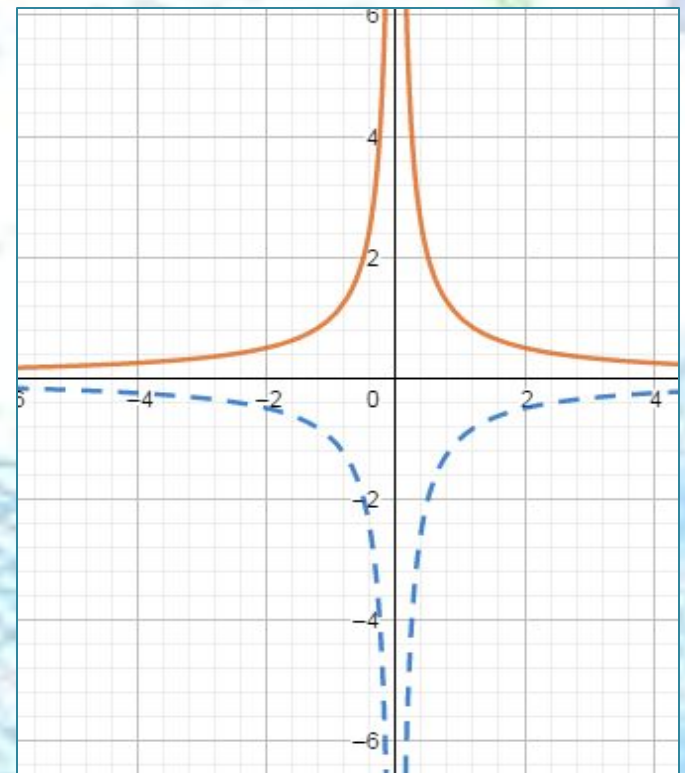


Рис.11

Деформация (сжатие и растяжение). Сжатие (растяжение) графика вдоль оси ординат.

Для построения графика функции $y=A \cdot f(x)$ следует построить график функции $y=f(x)$ и увеличить его ординаты в A раз при $A>1$ (произвести растяжение графика вдоль оси ординат) или уменьшить его ординаты в $1/A$ раз при $A<1$ (произвести сжатие графика вдоль оси ординат). Полученный график является графиком функции $y=A \cdot f(x)$

Сжатие (растяжение) графика вдоль оси абсцисс.

Для построения графика функции $y=f(\omega x)$ следует построить график функции $y=f(x)$ и уменьшить его абсциссы в ω раз при $\omega>1$ (произвести сжатие графика вдоль оси абсцисс) или увеличить его абсциссы в $1/\omega$ раз при $\omega<1$ (произвести растяжение графика вдоль оси абсцисс). Полученный график является графиком функции $y=f(\omega x)$.



Задания для самостоятельного выполнения

С помощью элементарных преобразований постройте графики следующих функций:

$$y = x^2 - 2$$

$$y = \sin \frac{1}{2}x$$

$$y = (x + 1)^2$$

$$y = -3\sin x$$

Написать последовательность преобразований и построить графики следующих функций:

$$y = \sqrt{4 - 5x}$$

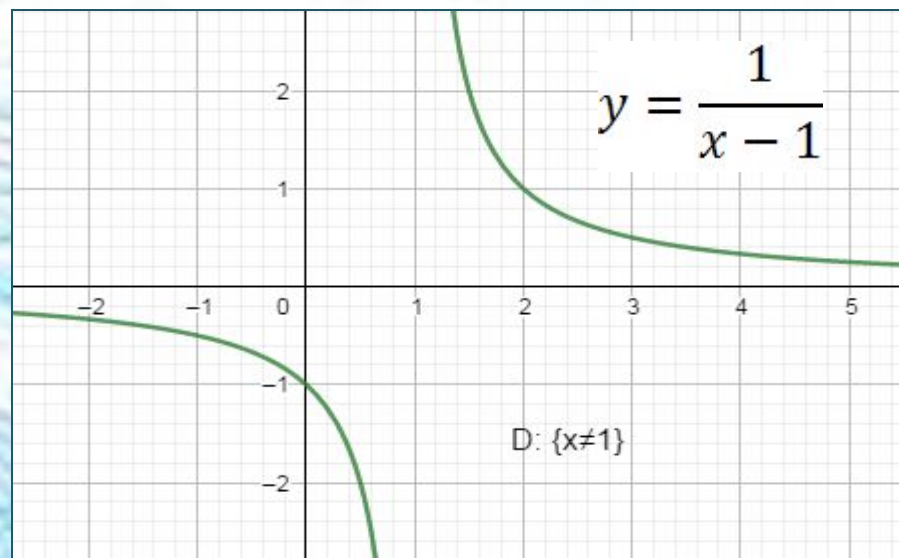
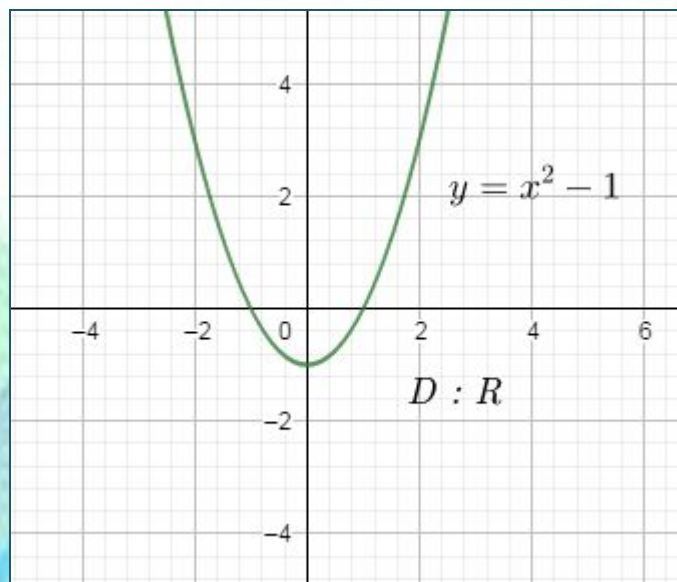
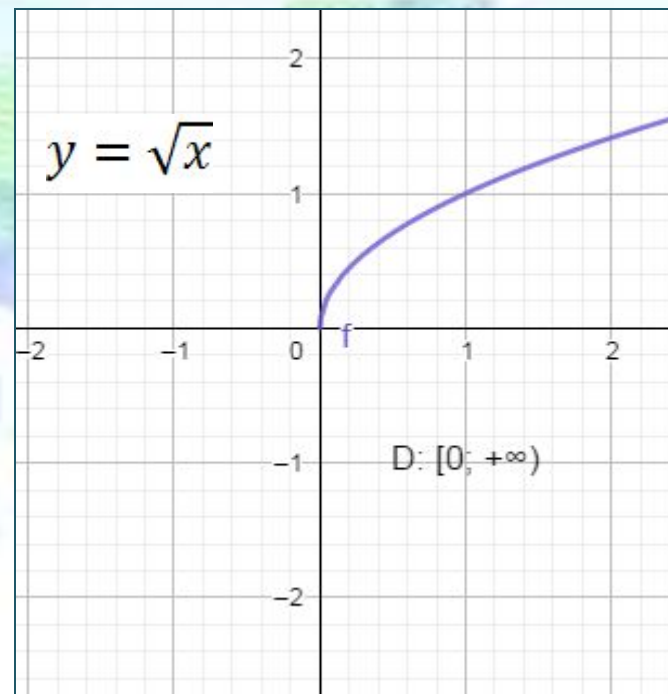
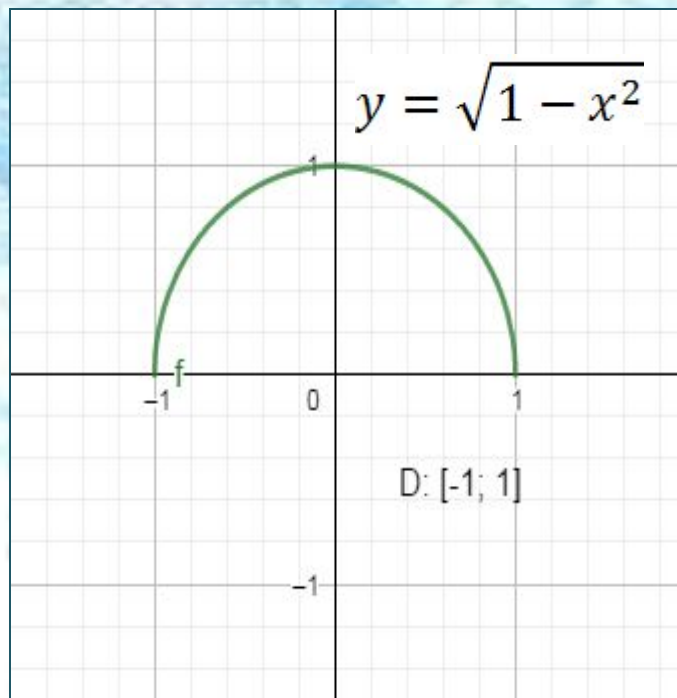
$$y = \ln(1 - x)$$

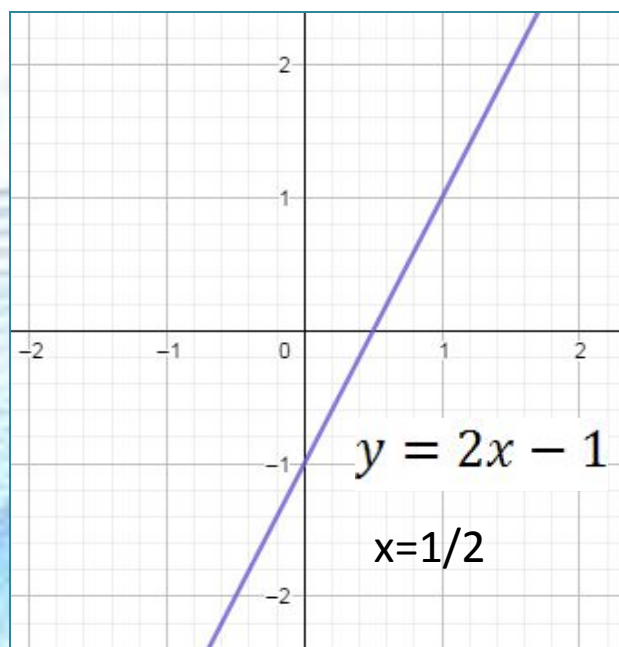
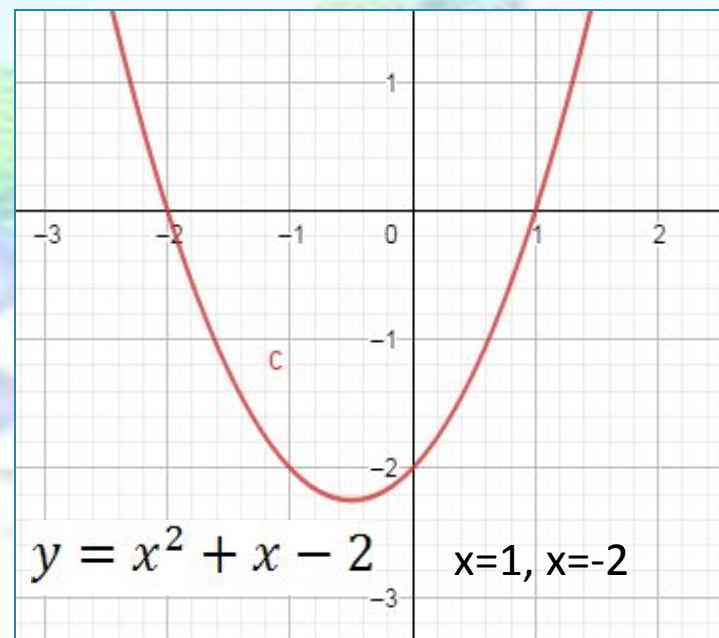
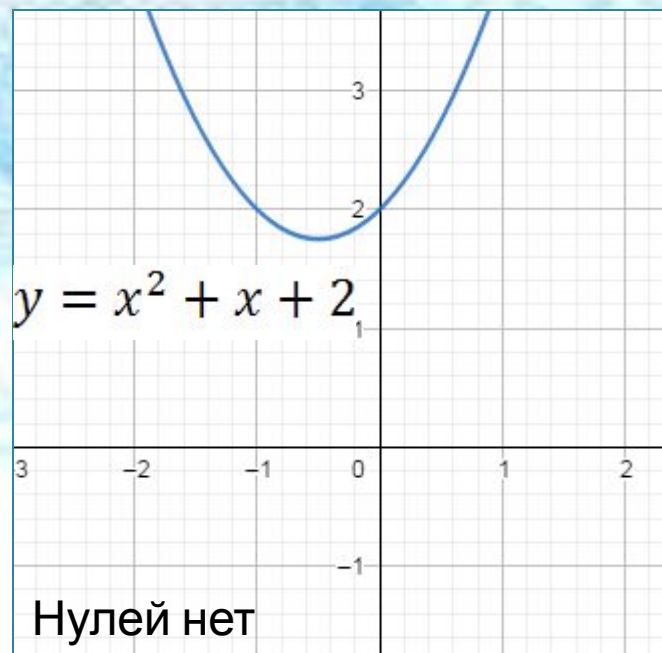
$$y = (x - 1)^3 + 2$$

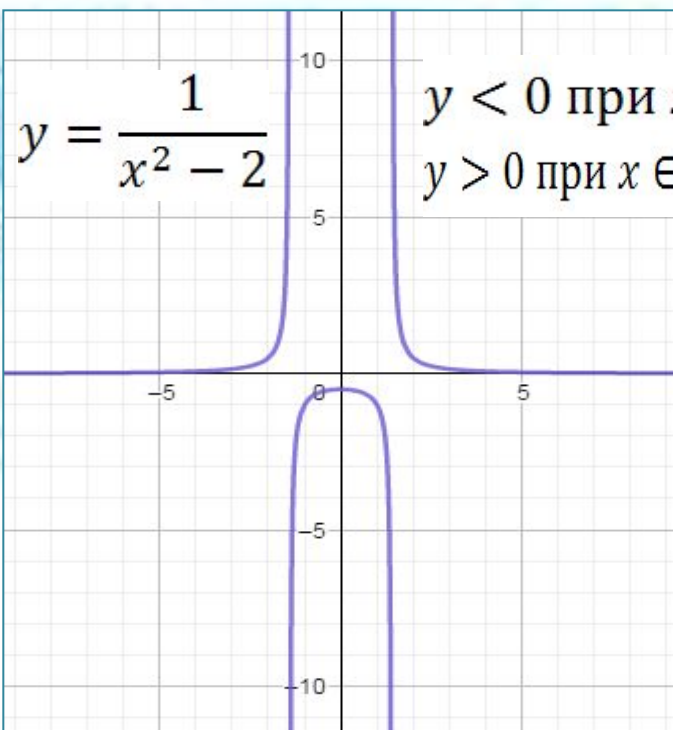
$$y = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}x\right)$$

Список использованной литературы

1. Башмаков М.И. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. Для студ. Учреждений сред. Проф. образования/ М.И. Башмаков. - М.: Издательский центр «Академия», 2017
2. Башмаков М.И. учебник для 10 класса: среднее (полное) общее образование (базовый уровень)/ М.И. Башмаков. - М.: Издательский центр «Академия», 2014
3. Башмаков М.И. Математика 10 класс. Сборник задач: среднее (полное) общее образование (базовый уровень)/ М. И. Башмаков. - М.: Издательский центр «Академия», 2014

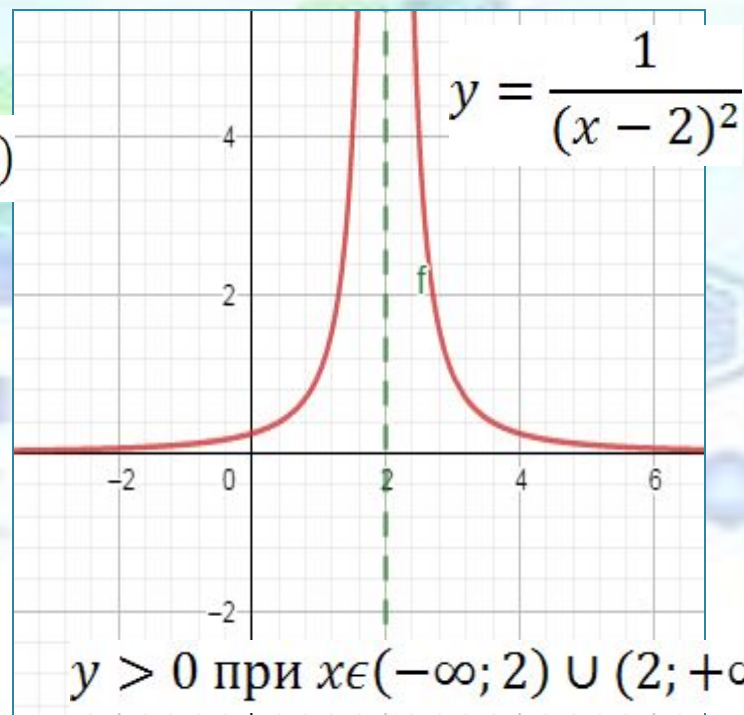




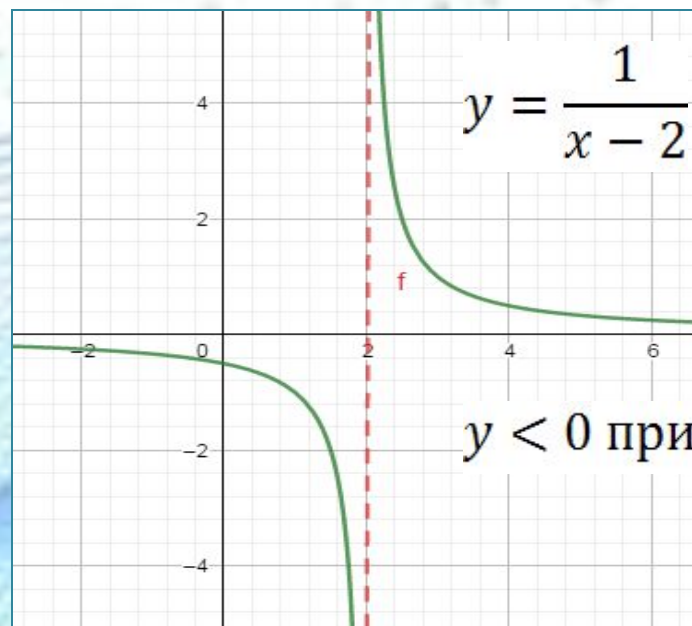


$y < 0$ при $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

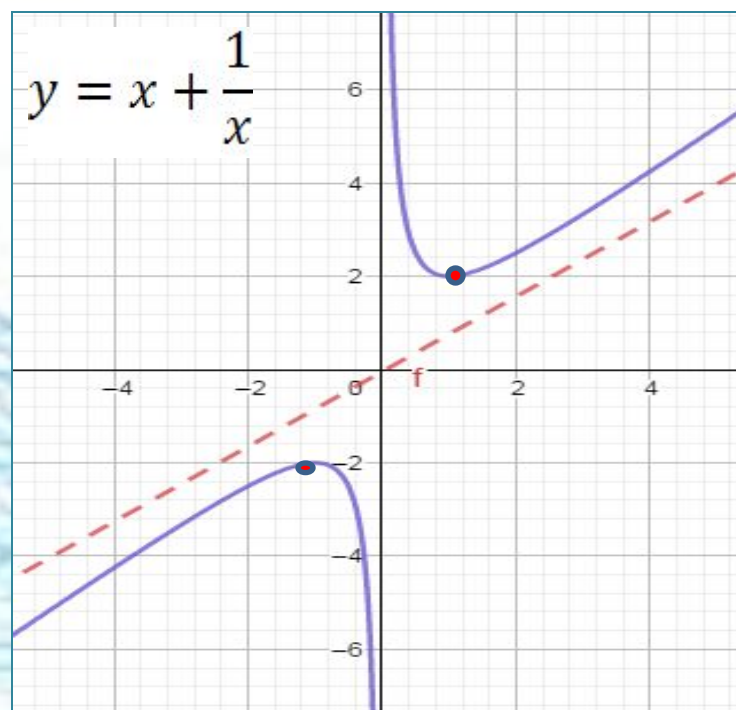
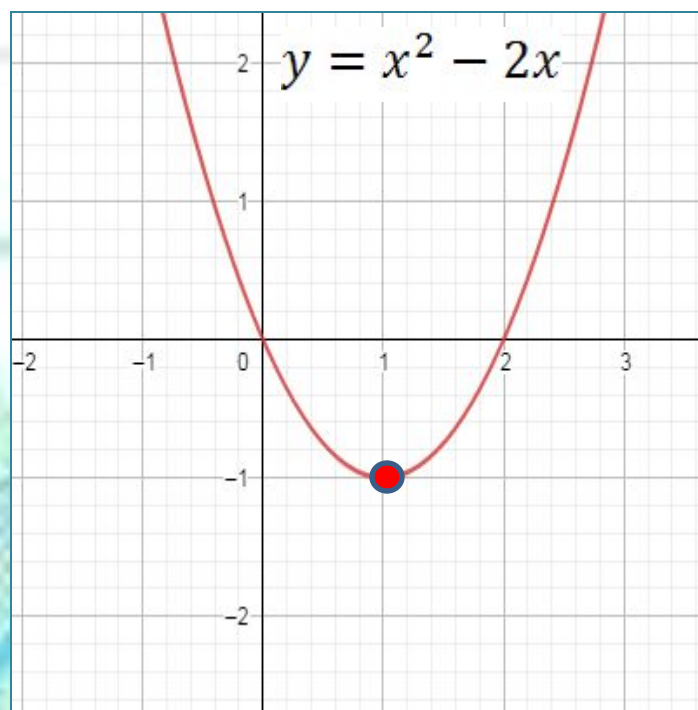
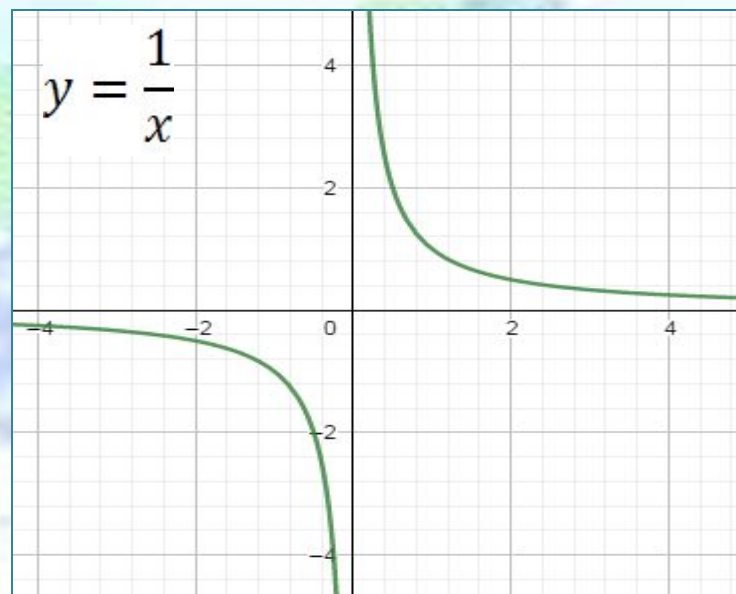
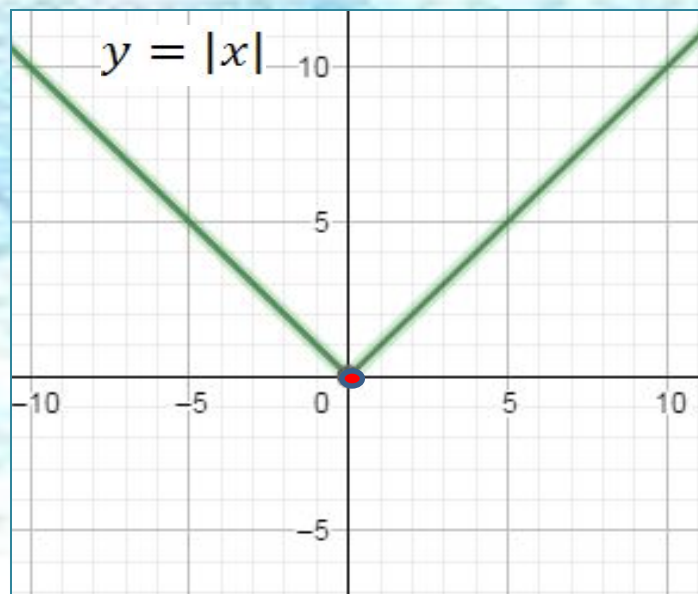
$y > 0$ при $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

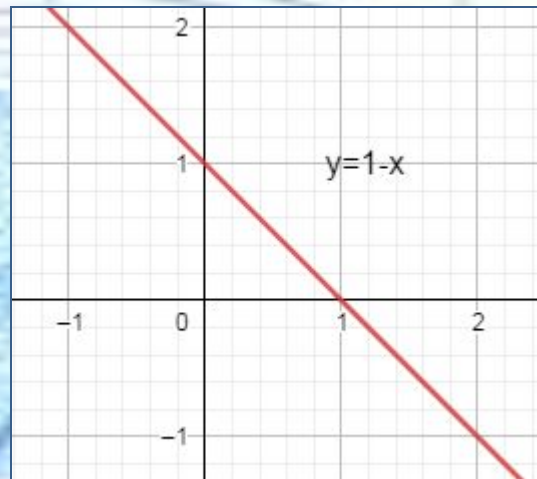
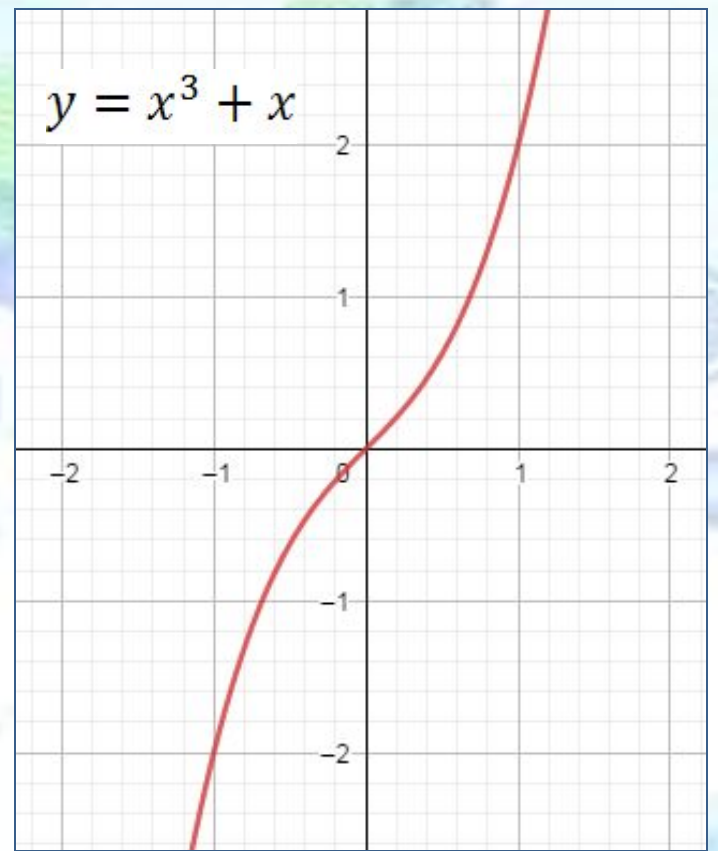
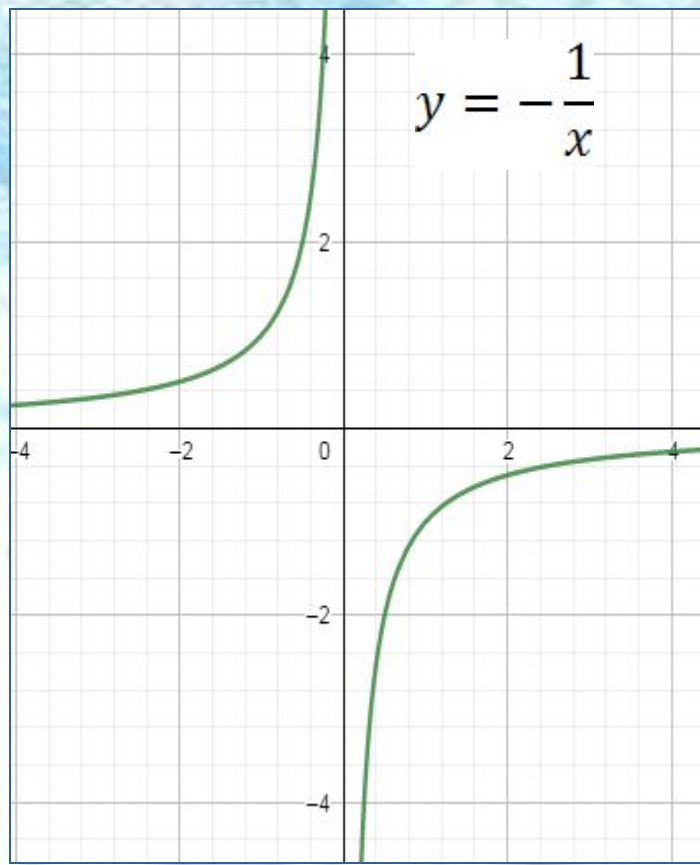


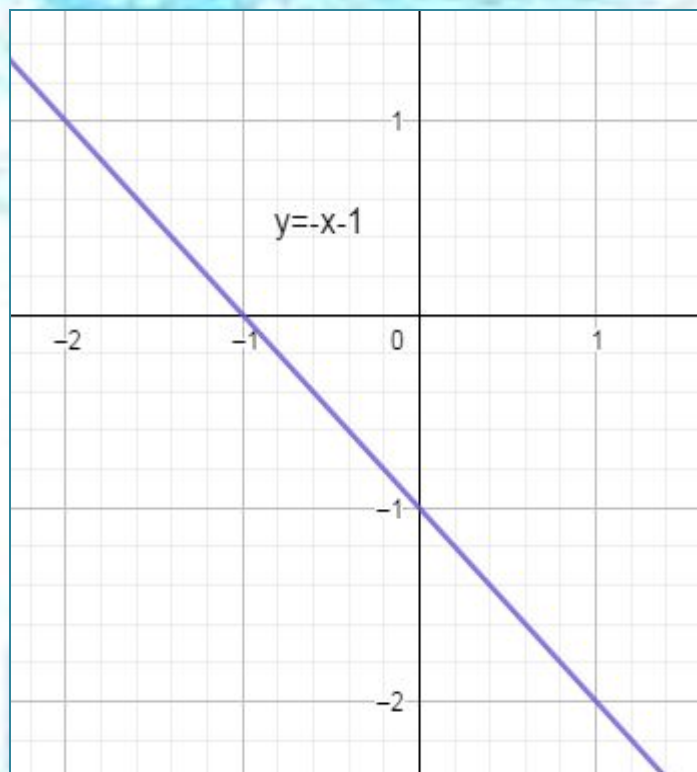
$y > 0$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$



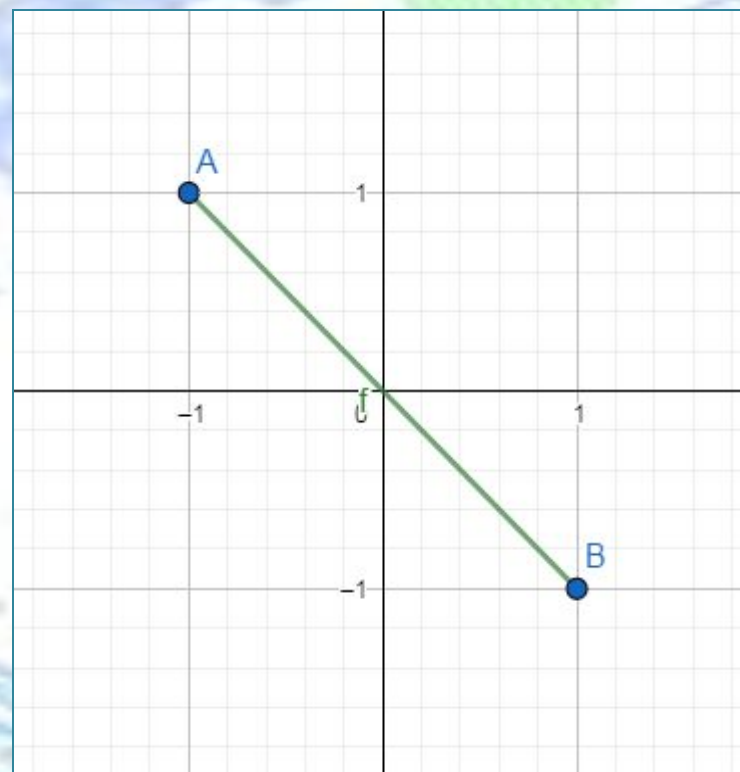
$y < 0$ при $x < 2$, $y > 0$ при $x > 2$







$y = -x - 1$, функция не имеет
ни наибольшего, ни наименьшего значений



$y = -x, x \in [-1; 1]$

