

Тригонометрия

Тема:

Тригонометрические функции

Содержание

1.История

2.Введение

3.Основные тождества и их следствия

4.Формулы сложения и вычитания аргументов

5.Числовая окружность

6.Некоторые значения тригонометрических функций

7.Четность тригонометрических функций

8.Формулы приведения

9.Знаки тригонометрических функций по четвертям

История

История

Истоки тригонометрии берут начало в древнем Египте, Вавилонии и долине Инда более 3000 лет назад. Индийские математики были первопроходцами в применении алгебры и тригонометрии к астрономическим вычислениям. Лагадха — единственный из самых древних известный сегодня математик, использовавший геометрию и тригонометрию в своей книге «Джьётиша-веданга» («Jyotisa Vedanga»), большая часть работ которого была уничтожена иностранными захватчиками.

Греческий математик Клавдий Птолемей также внес большой вклад в развитие тригонометрии. Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые Аль-Батани (850-929) и Абу-ль-Вафа, Мухамед-бен Мухамед (940-998), который составил таблицы синусов и тангенсов через $10'$ с точностью до $1/60^4$. Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201-1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе «Трактат о полном четырехстороннике» изложил плоскую и сферическую тригонометрию как самостоятельную дисциплину.

Введение

Для введения тригонометрических функций нам понадобится новая математическая модель – числовая окружность.

Пример 1. Дана окружность радиусом 1 см. Чему равна длина окружности, ее половины, ее четверти?

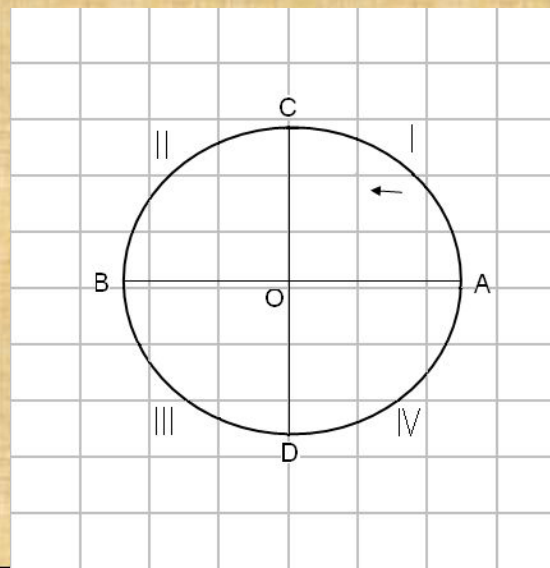
Решение. Длина L окружности радиусом R вычисляется по формуле: $L=2\pi R$, где $\pi \approx 3,14$.

Если $R = 1$ см, то

$$L = 2 \pi \text{ см} \approx 6,28 \text{ см}.$$

Длина половины окружности равна π см, а длина четверти окружности (AB, BC, CD или DA) равна $\pi/2$ см.

Ответ: $\approx 6,28$ см; $\approx 3,14$ см; $\approx 1,57$.



Основные тождества и их следствия

1 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

2 $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

3 $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

4 $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

5 $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

6 $\operatorname{tga} \times \operatorname{ctga} = 1$

7 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

8 $\operatorname{ctg} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$3. \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$4. \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$6. \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

$$7. \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$$

$$8. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Числовая окружность

- Единичная окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть числовой окружностью.
- Пример 1. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу: $\pi/2$, π , $3\pi/2$.
- Решение: Так как все числа положительны, то для отыскания соответствующих им точек окружности нужно пройти по окружности путь заданной длины, двигаясь из точки A в положительном направлении. Учтем при этом, что длина каждой четверти единичной окружности равна $\pi/2$.
- $AB=\pi/2$, значит, числу $\pi/2$ соответствует точка B ; $B=B(\pi/2)$.

Некоторые значения тригонометрических функций

Градусы	0°	15°	18°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Рadiany	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Функция	0	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\sin \alpha$										
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Четность тригонометрических функций

Функция $\sin a$ нечетная, поэтому $\sin(-a) = -\sin a$

Функция $\cos a$ четная, поэтому $\cos(-a) = \cos a$

Функции $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{ctg} a$ нечетные, поэтому
 $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{ctg}(-a) = -\operatorname{ctg} a$

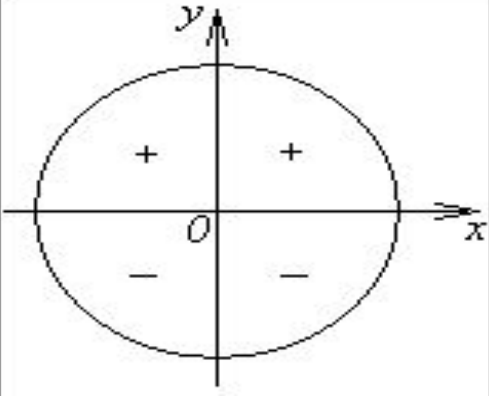
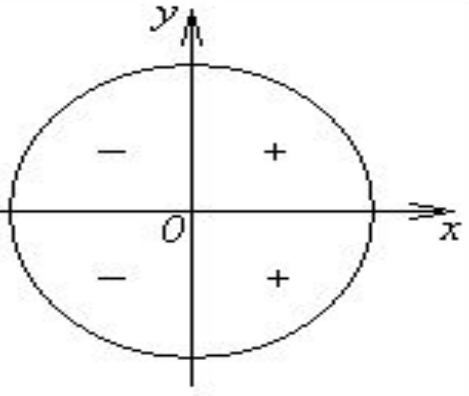
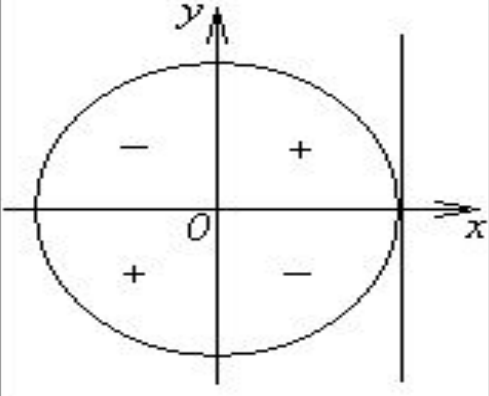
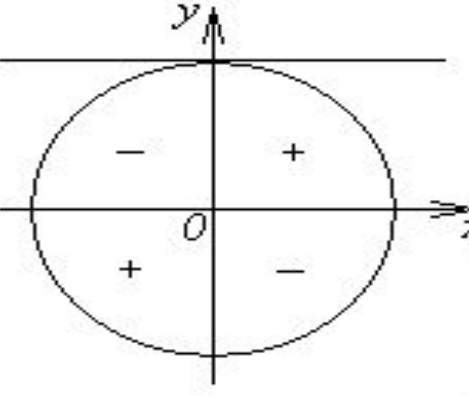
Формулы приведения тригонометрических функций

α	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Эти формулы в общем виде можно сформулировать так:

1. Если угол α откладывается от горизонтальной оси, то название функции не меняется.
2. Если угол α откладывается от вертикальной оси, то название функции меняется на противоположную.
3. Перед приведенной функцией ставится знак, который имеет исходная (приводимая) функция.

Знаки тригонометрических функций по четвертям

	
синус	косинус
	
тангенс	котангенс