

Предел функции

Бесконечные величины и правила работы с ними.

Бесконечно большим или просто бесконечным, называется **переменное** число, стремящееся превзойти по абсолютной величине всякую границу, как бы велика она не была, а **бесконечно малым** называют всякое переменное число, имеющее пределом нуль.

Две бесконечно малые величины называются величинами одного и того же порядка, если их отношение стремится к конечному пределу, отличному от нуля.

Если же отношение одной бесконечно малой величины β к другой α стремится к нулю, то говорят, что β бесконечно малая **более высокого порядка**, чем α .

Правила работы с бесконечными величинами

1. $\alpha \cdot n = \alpha$

2. $\alpha + \beta = \alpha$

3. $\alpha \cdot \beta = \alpha'$ (более высокого порядка)

4. $\frac{\alpha}{n} = \alpha$

5. $n \cdot \gamma = \gamma$

6. $\gamma \cdot \mu = \gamma'$ (более высокого порядка)

7. $\frac{n}{\gamma} = \alpha$

8. $\frac{n}{\alpha} = \gamma$

9. $\frac{\gamma}{\alpha} = \gamma$

10. $\frac{\alpha}{\gamma} = \alpha$

11. Ситуации $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\mu}, \alpha \cdot \gamma, \gamma - \mu$ и некоторые другие называются неопределенностями и требуют для своего разрешения специальных приемов.

Предел функции

Предел функции при $x \rightarrow \infty$
Рассмотрим функцию $y = f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ при неограниченном росте величины x

X	1	2	10	100	1000
Y	1	1.5	1.9	1.99	1.999

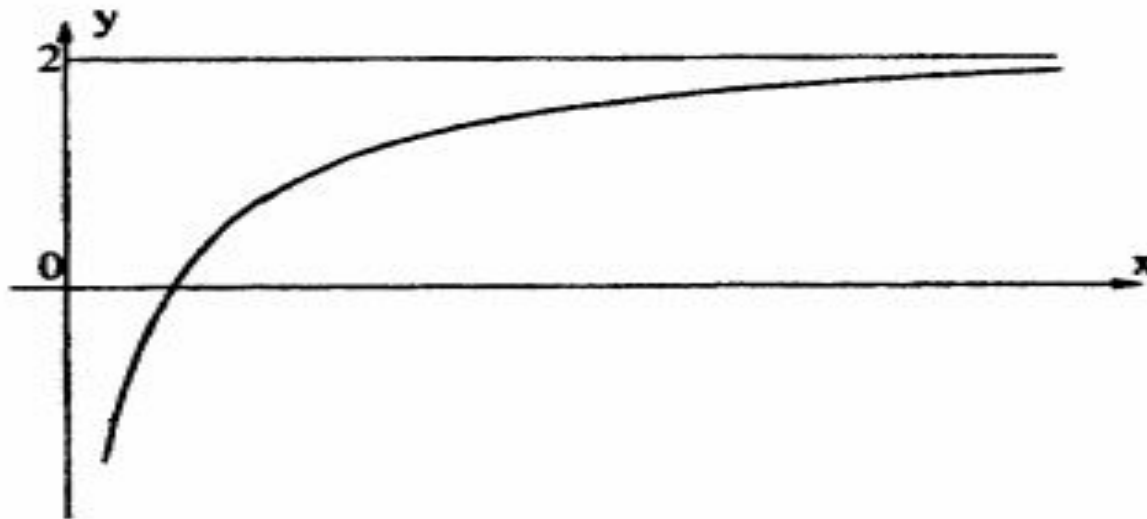


График функции $y = 2 - \frac{1}{x}$

Из приведенной таблицы и графика видно, что значение функции при росте значения аргумента постепенно приближается к 2.

Таким образом для функции может быть введено понятие предела функции.

Определение предела при $x \rightarrow \infty$

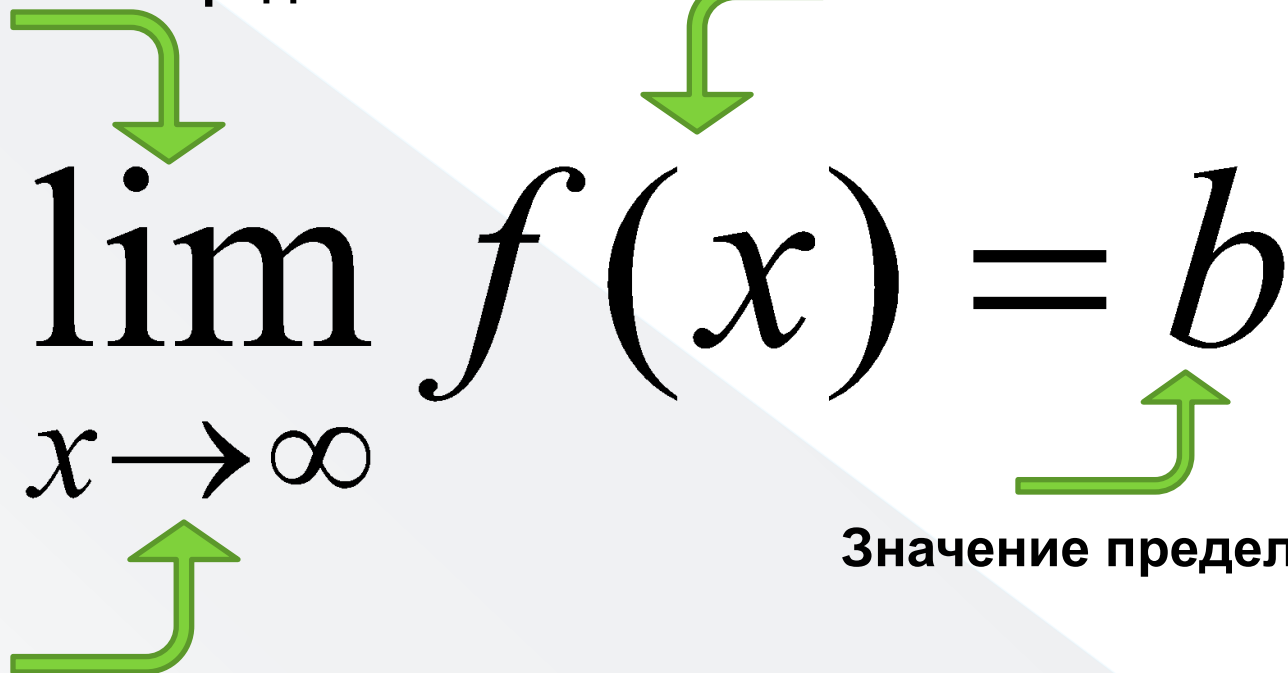
Число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если каково бы ни было положительное число ε можно найти такое N , что для всех $x > N$ выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Символическая запись такого предела выглядит так:

Обозначение предела

Функция

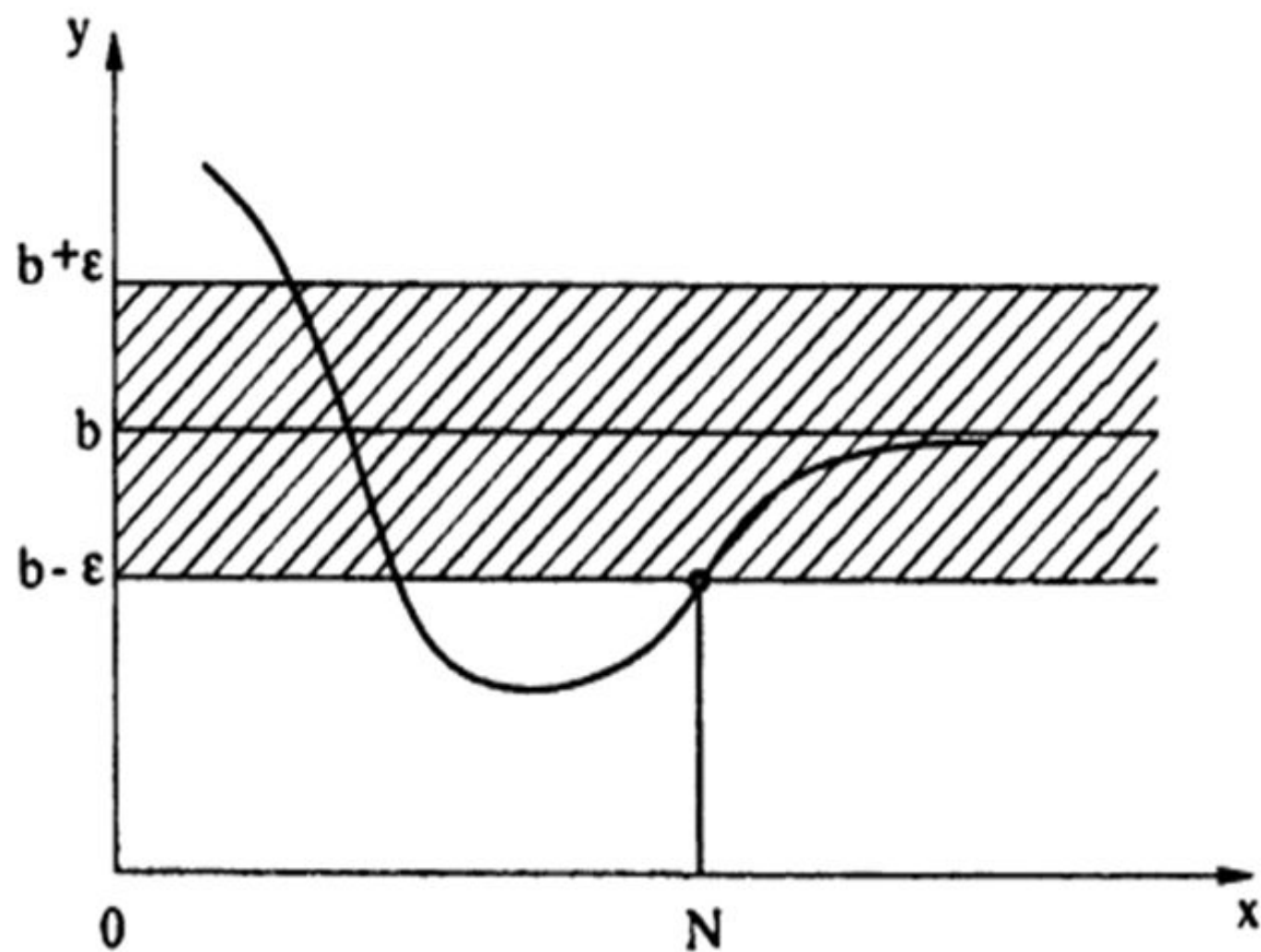


The diagram shows the limit expression $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$. Four green arrows point to specific parts of the expression: one from 'Обозначение предела' to the limit symbol 'lim', one from 'Функция' to the function 'f(x)', one from 'Значение предела' to the value 'b', and one from 'Направление предела' to the expression 'x → ∞'.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

Значение предела

Направление предела
(к чему стремится x)



Геометрический смысл предела функции при $x \rightarrow \infty$

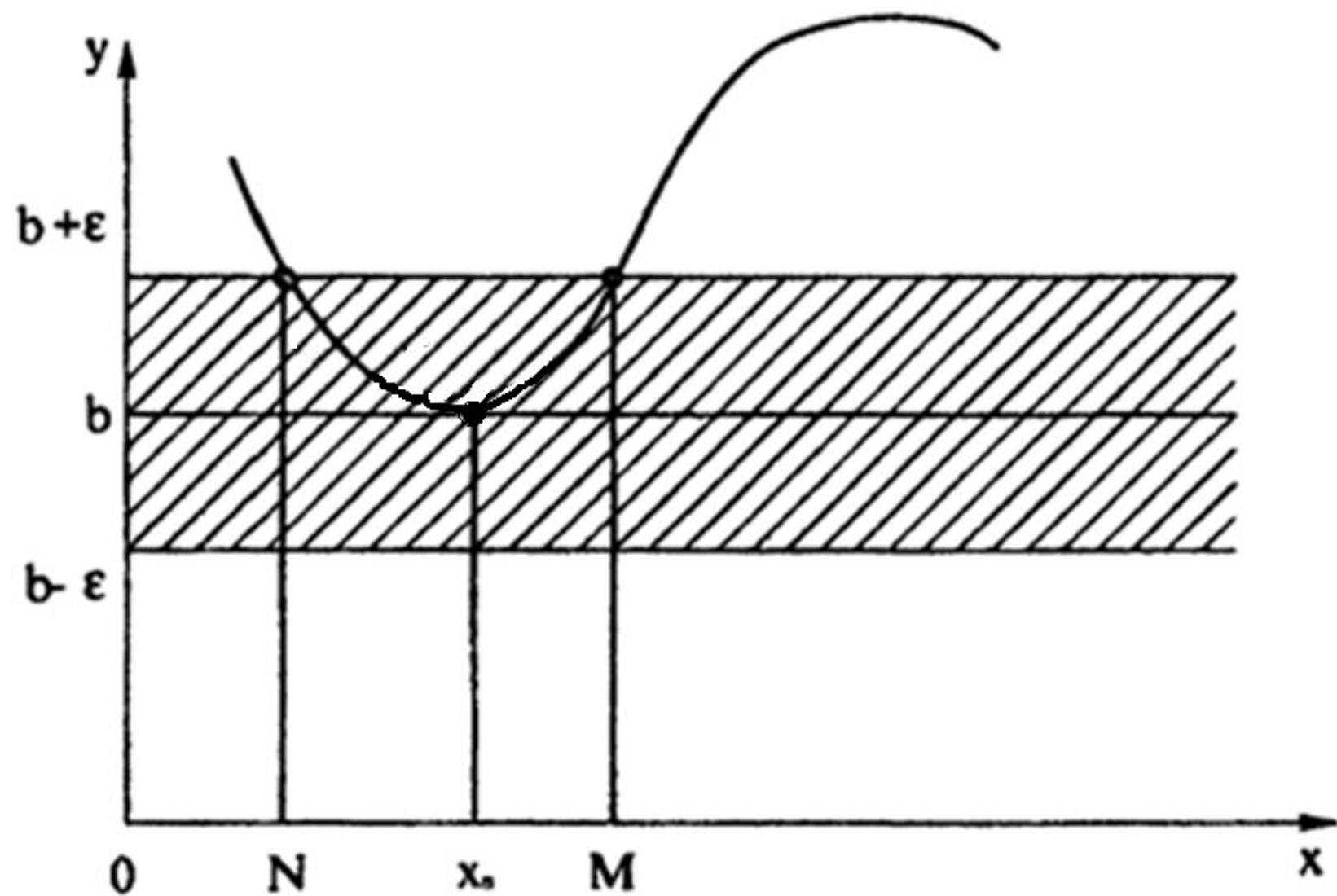
Аналогично вводится понятие предела функции в общем случае

Число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если каково бы ни было значение ε , можно найти такие N и M , что для всех x , лежащих в интервале $(N; M)$ (за исключением, быть может, точки x_0), выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Символическая запись предела функции при $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$



Геометрический смысл предела функции при $x \rightarrow x_0$

Теоремы о пределах

1. Предел постоянного равен этому постоянному.

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C$$

2. Предел алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме пределов от этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

Теоремы о пределах

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов от этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов от этих функций при условии, что предел знаменателя не равен нулю

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)} \text{ при условии } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0$$

Следствия из теорем о пределах

1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела.

$$\lim_{x \rightarrow a} (K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

2. Если n – натуральное число то:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

3. Предел многочлена (целой рациональной функции)

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

при $x \rightarrow a$ равен значению этого многочлена при $x=a$.

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

4. Предел дробно-рациональной функции

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$$

при $x \rightarrow a$, равен значению этой функции при $x=a$, при условии что a входит в область допустимых значений функции.

$$\lim_{x \rightarrow a} R(x) = R(a)$$

5. Используются также следующие свойства

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

При решении задач на поиск пределов функции необходимо обращать внимание на возникновении **неопределенностей**. В этом случае для решения задач необходимо применять специальные методы.

Производная

Задача о скорости движения

Пусть тело движется прямолинейно и задан закон его движения $s = s(t)$, т.е. известно расстояние s точки от некоторого начала отсчета в каждый момент времени t .

В момент времени t пройденное расстояние равно $s(t)$, в момент времени $t + \Delta t$ расстояние равно $s(t + \Delta t)$

За промежуток времени от t до $t+\Delta t$ т.е. за время Δt тело пройдет расстояние $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$.

Средняя скорость движения за промежуток времени Δt будет

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Средняя скорость в момент времени t в общем случае зависит от Δt .

Чем меньше промежуток Δt , тем точнее средняя скорость будет соответствовать реальной скорости тела в момент времени t .

В предельном случае можно записать

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Пределы подобного вида очень часто встречаются в математике. Это привело к возникновению понятия производной.

Определение производной

Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения (изменения) функции к приращению (изменению) аргумента, при стремлении изменения аргумента к нулю, если этот предел существует

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Общее правило поиска производной

Пусть дана функция $f(x)$, непрерывная и определенная в некоторой области. Необходимо найти производную этой функции.

1. Придадим аргументу x некоторое приращение (изменение) Δx и подставим в выражение функции вместо x новое значение $x + \Delta x$. Найдем новое измененное значение функции при новом значении аргумента.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

2. Найдем приращение (изменение) функции.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3. Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. Находим предел полученного отношения при

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Этот предел и есть производная исходной функции $f(x)$

Рассмотрим пример

Пусть $y = \sin x$, найдем производную этой функции.

Увеличим x на Δx при этом y увеличится на Δy

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

Это выражение можно записать в виде

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

Для преобразования этого выражения используем формулу разности синусов

○
$$\Delta y = 2 \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

После упрощения

$$\Delta y = 2 \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

Из тригонометрии известно что при малых Δx справедливо равенство

$$\sin \frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta x}{2}, \text{ отсюда следует}$$

$$\Delta y = 2 \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

Или после сокращения

$$\Delta y = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x$$

Получим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

Найдем согласно определению
производной

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x$$

Таблица производных

Функция	Производная
1. $y = C$	$y' = 0$
2. $y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
3. $y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
4. $y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
5. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln(a)$
6. $y = \log_a x$	$y' = 1/(x \cdot \ln a)$
7. $y = e^x$	$y' = e^x$

Основные правила дифференцирования.

Пусть заданы две функции $u(x)$ и $v(x)$.

1. Производная алгебраической суммы двух функций

$$y = u \pm v \quad y' = u' \pm v'$$

2. Производная произведения двух функций.

$$y = u \cdot v \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

3. Производная частного двух функций

$$y = \frac{u}{v} \quad y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

4. Производная сложной функции.

Пусть $y = f(u)$, а $u = v(x)$ тогда говорят, что y является сложной функцией. Её производная находится по формуле

$$y' = v'(x) \cdot f'(v(x))$$

Дифференциал функции

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx , часть приращения функции

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ можно записать дифференциал в виде

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

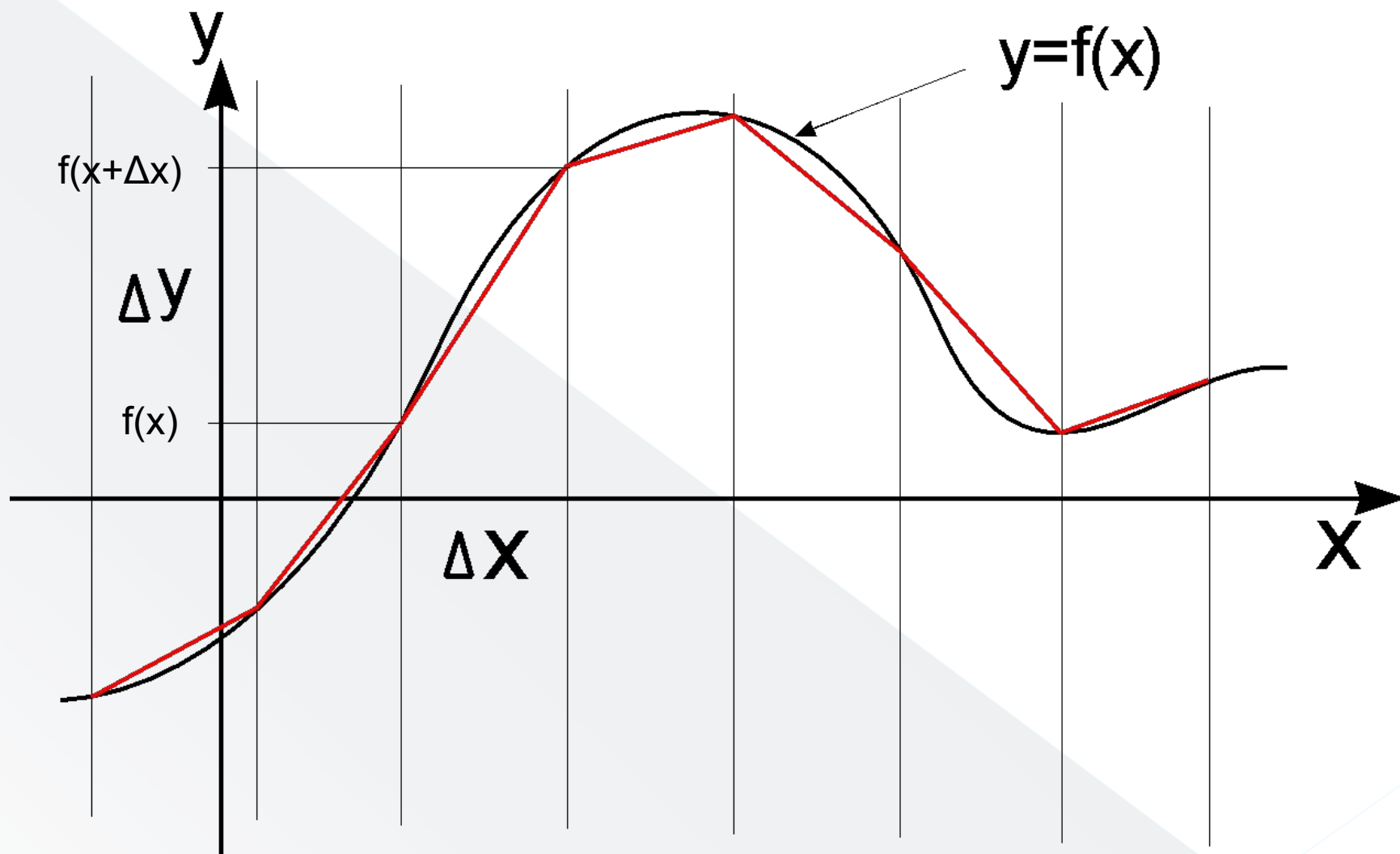
И следовательно производную

можно записать в виде $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Численные методы дифференцирования

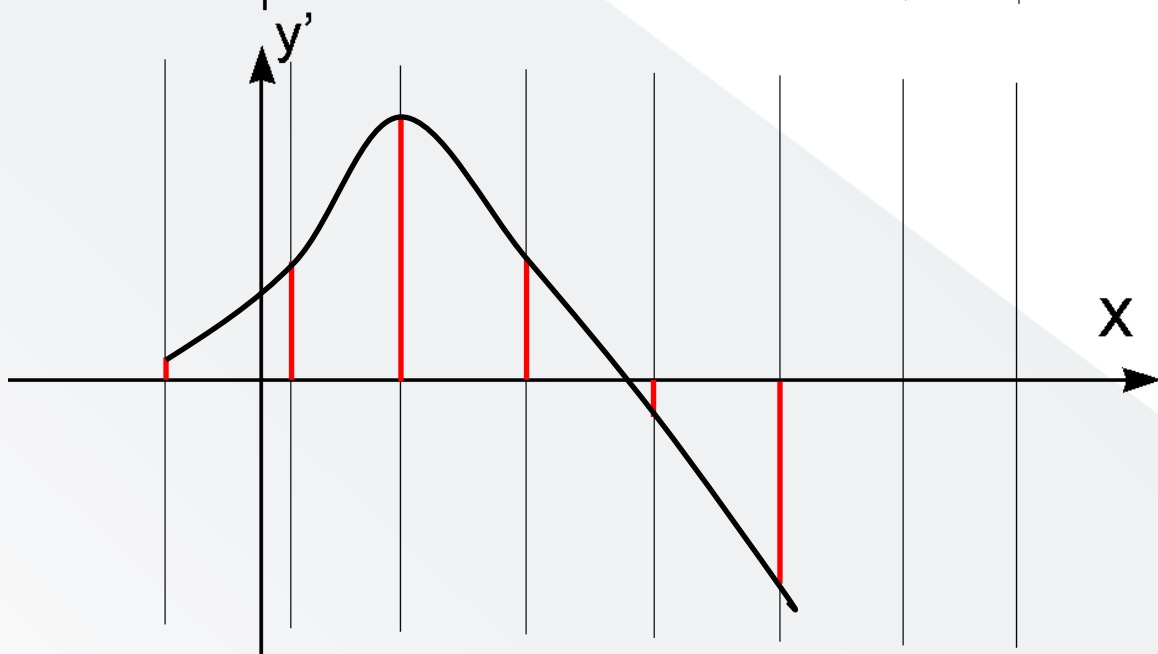
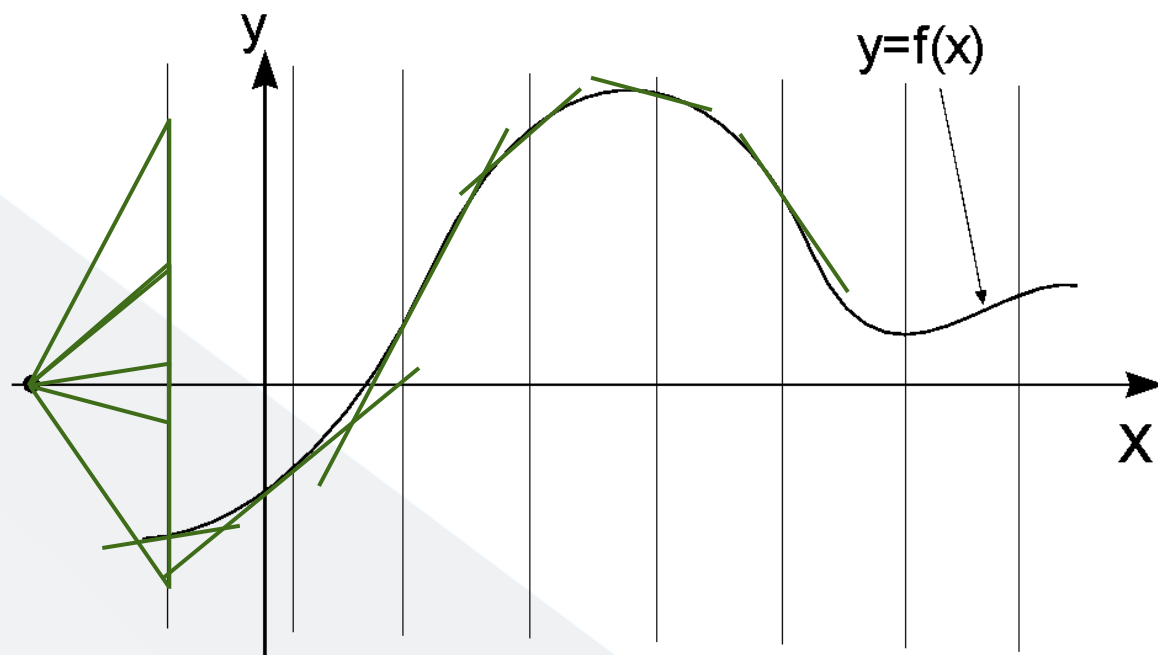
- Численные методы дифференцирования основаны на том, что исследуемая функция на малом участке может быть представлена в виде отрезка прямой и следовательно при малом изменении аргумента Δx можно записать

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Геометрические методы дифференцирования

Геометрическим смыслом производной в данной точке является тангенс угла наклона касательной проведенной к графику функции через данную точку. На этом основан геометрический метод дифференцирования.



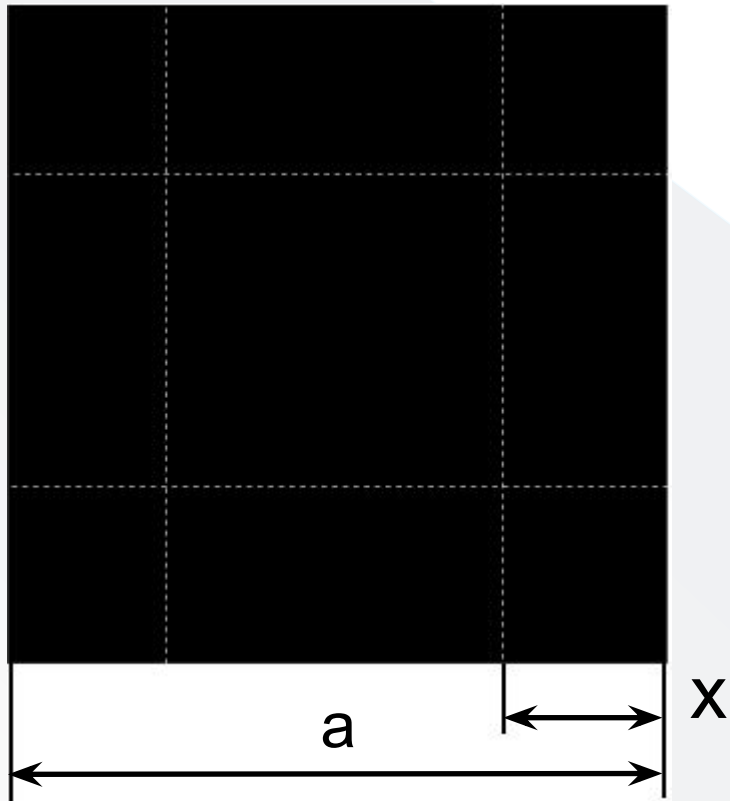
Производные высших порядков

● Производной второго порядка функции $y=f(x)$ называется производная от её производной.

Вторая производная обозначается y'' ,
или $\frac{d^2 y}{dx^2}$

Если $s=f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени есть ускорение этого движения.

Использование производной для решения задач на экстремум функции



Задача о квадратном ведре. Дан квадратный лист металла с ребром равным a . По углам листа делают вырезы размером x , сгибают лист по вырезам и запаивают швы, получается квадратное ведро. Необходимо узнать при какой величине выреза x объем ведра будет максимальный

Из рисунка видно, что основанием ведра будет квадрат с ребром равным $a - 2x$, а высотой ведра будет размер x . Отсюда объем можно вычислить по формуле.

$$V = (a - 2x)^2 \cdot x$$

Упростим выражение раскрыв скобки.

$$V = (a^2 - 4ax + 4x^2) \cdot x$$

$$V = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

В точке максимума производная этой функции равна нулю, следовательно

$$V' = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$$

Перепишем полученное выражение в более привычном виде и решим его относительно x

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 4 \cdot 12a^2}}{24}$$

$$x = \frac{8a \pm 4a}{24}$$

Решение дает два значения

$$x_1 = \frac{1}{2}a \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1}{6}a$$

Так как x не может быть равен x_1 , то ответом будет значение x_2

В общем случае задачи на экстремум решаются в следующей последовательности:

1. Составляется уравнение в левой части которого находится величина экстремум которой ищется, а в правой переменная от которой этот экстремум зависит.
2. Находится производная полученной функции и приравняется к нулю
3. Решается полученное уравнение относительно переменной.
4. Анализируются полученные решения.

Применение производной для исследования функции.

Производные при исследовании функций используются для:

1. Определения интервалов возрастания и убывания функции.
2. Поиска точек максимумов и минимумов функции, точек перегибов функции.
3. Поиска участков выпуклости и вогнутости исследуемой функции
4. Поиска точек перегиба функции(если они есть)

1. Для определения участков возрастания, уменьшения и постоянства функции, воспользуемся следующими признаками

Достаточный признак возрастания, убывания функции

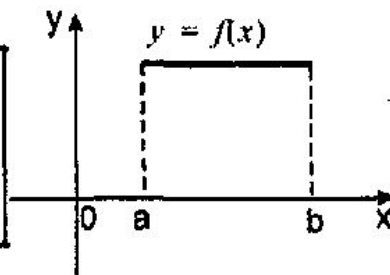
Если $f'(x) > 0$
для всех $x \in (a, b)$, $\Rightarrow$ функция $y = f(x)$
возрастает на промежутке (a, b) .

Если $f'(x) < 0$
для всех $x \in (a, b)$, $\Rightarrow$ функция $y = f(x)$
убывает на промежутке (a, b) .

Если функция непрерывна в конце промежутка, то его можно присоединить к промежутку возрастания (убывания) функции.

Достаточное и необходимое условие постоянства функции

Если $f'(x) = 0$
для всех $x \in (a, b)$, $\Leftrightarrow$ функция $y = f(x)$
постоянная
на промежутке (a, b) .



2. Для поиска критических точек находят точки в которых производная функции равна нулю или не существует.

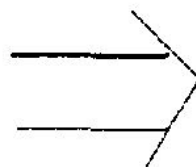
Критические точки функции

$y = f(x)$ — непрерывная функция.

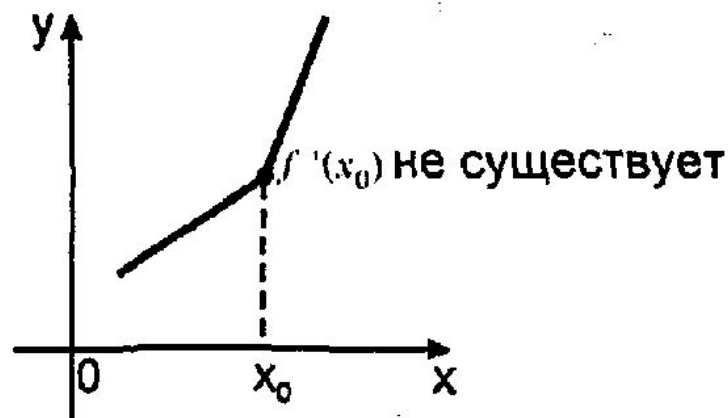
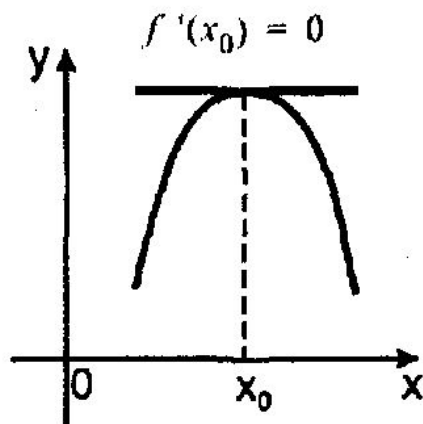
x_0 — внутренняя точка её области определения.

Если

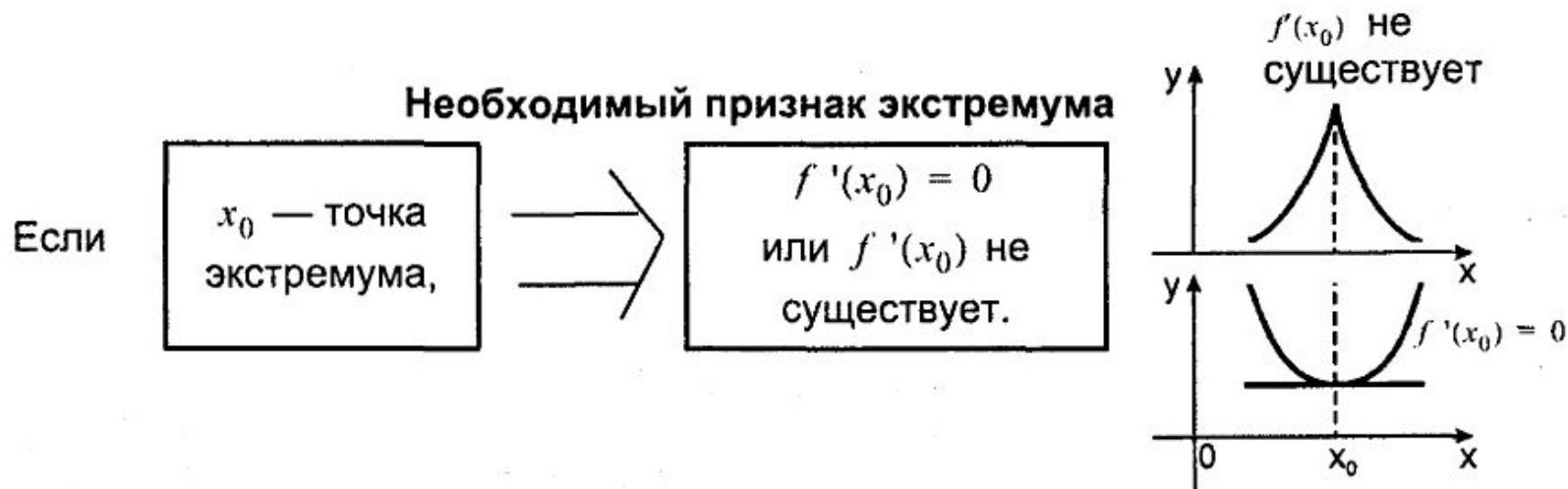
$f'(x_0) = 0$
или $f'(x_0)$ не существует,



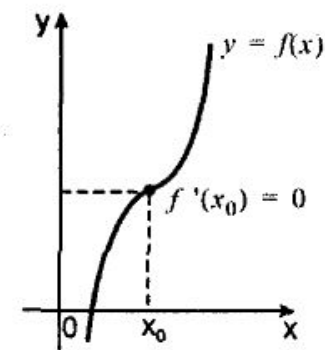
x_0 — критическая точка.



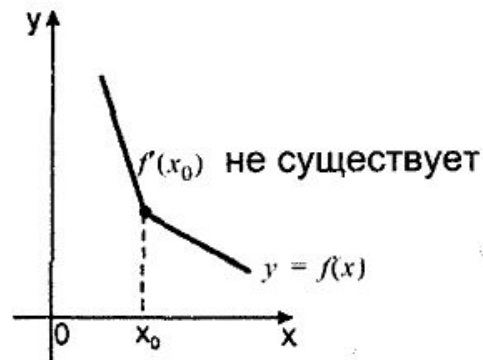
3. Поиск точек экстремумов функции производят среди критических точек



Точки экстремума нужно искать только среди критических точек, но не каждая точка, в которой $f'(x_0) = 0$ или не существует, является точкой экстремума.



$f'(x_0) = 0$, но x_0 —
не является точкой экстремума.



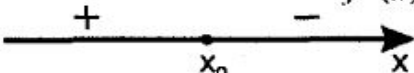
$f'(x_0)$ не существует, но x_0 —
не является точкой экстремума.

Достаточный признак экстремума функции

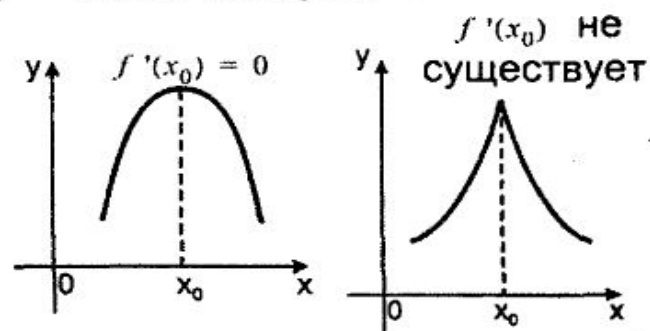
Первый признак

Если x_0 — критическая точка, $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует.

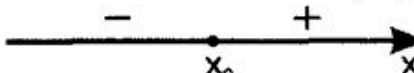
Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ изменяет знак с «+» на «-», $f'(x)$



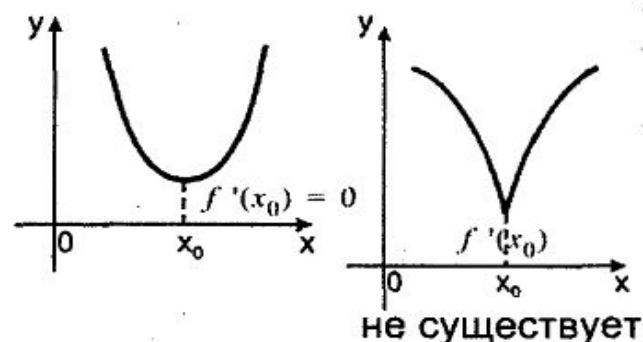

x_0 — точка максимума.



Если при переходе через x_0 производная $f'(x)$ изменяет знак с «-» на «+», $f'(x)$




x_0 — точка минимума.



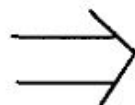
Второй признак

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 0 \\ f''(x_0) &< 0 \end{aligned}$$

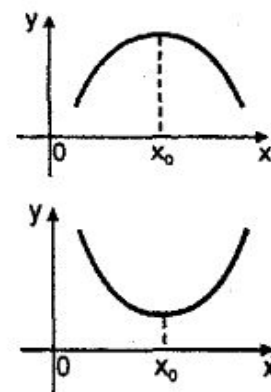


x_0 — точка максимума.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 0 \\ f''(x_0) &> 0 \end{aligned}$$

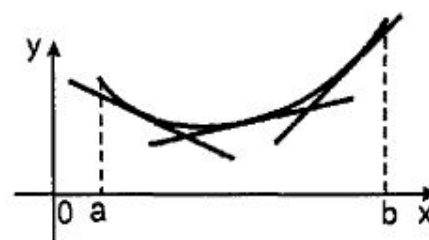
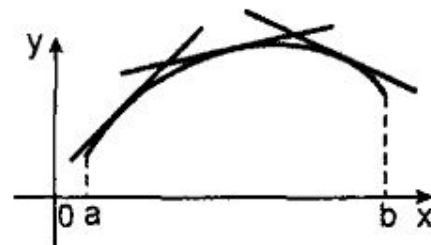


x_0 — точка минимума.

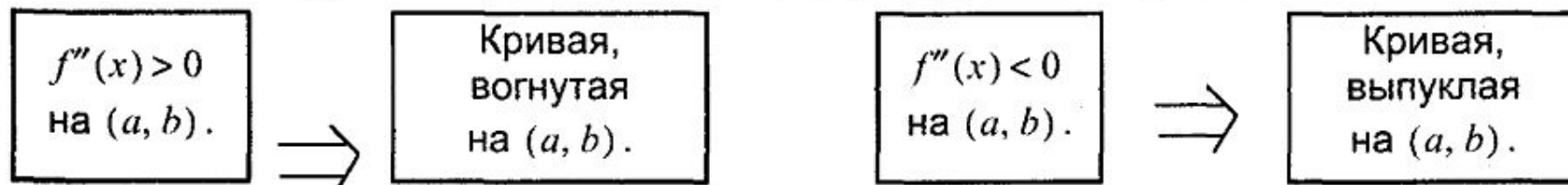


4. Анализ выпуклости функции

Выпуклость и вогнутость кривой

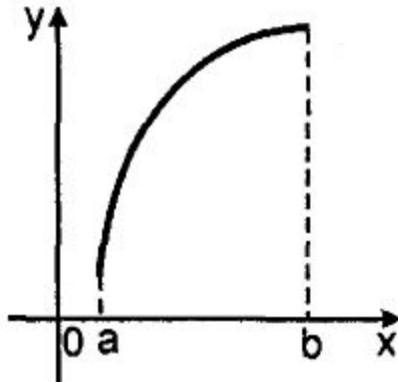
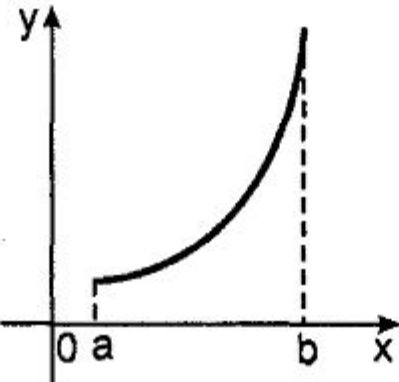
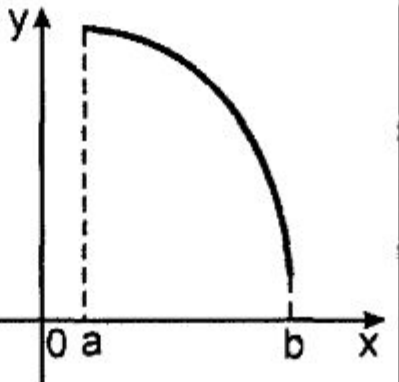
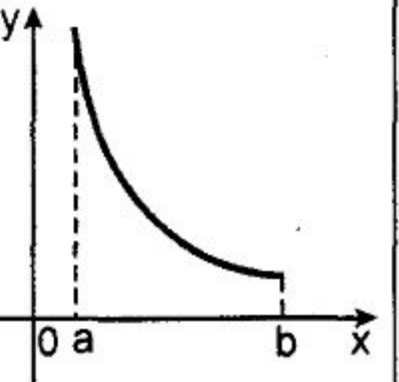


Достаточные признаки выпуклости и вогнутости



Для построения графика целесообразно проанализировать, какой вид имеет график функции на интервале (a, b) в зависимости от знаков первой и второй производных.

Результат удобно свести в таблицу:

$y' > 0$ $y'' < 0$	$y' > 0$ $y'' > 0$	$y' < 0$ $y'' < 0$	$y' < 0$ $y'' > 0$
			
возрастает, выпуклая.	возрастает, вогнутая.	убывает, выпуклая.	убывает, вогнутая.

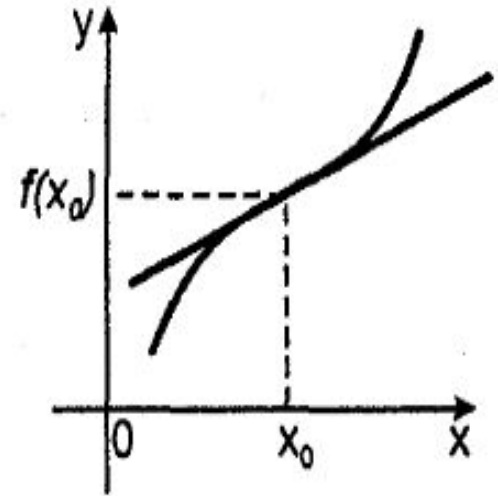
5. Анализ точек перегиба функции

Точки перегиба графика функции

Точка
перегиба
 $(x_0; f(x_0))$.



В точке $(x_0; f(x_0))$
существует
касательная, при
переходе через эту
точку выпуклость
меняется на вогнутость
(или наоборот).



Достаточный признак точки перегиба.

В точке $(x_0; f(x_0))$
существует касательная,
 $y''(x_0)=0$ (или не
существует) и при
переходе через точку x_0 y''
изменяет знак.



$(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба

Разные типы точек перегиба

$y'(x_0) = 0$	$y'(x_0) > 0$	$y'(x_0) < 0$	$y'(x_0) = \infty$
