ЗАДАЧИ НА ТЕОРИЮ ЧИСЕЛ.
ЕГЭ ЗАДАЧА №21 (С-6).

Иванова Инна Владимировна
Сунтар МБОУ «СПТЛ-и»

Демо-2015. Задание №21.

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно - 3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно - 8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

ДЕМО-2015. ЗАДАНИЕ №21 ... Е А).

1 балл

Пусть среди написанных чисел k положительных, l нулей и m отрицательных. Тогда количество всех написанных чисел равно $k + l + m$.

Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому:

Сумма всех написанных чисел равна $-3(k + l + m)$

Сумма всех положительных чисел равна $4k$.

Сумма всех отрицательных чисел равна $-8m$.

Тогда получаем, что $4k - 8m + 0l = -3(k + l + m)$,

то есть $4(k - 2m) = -3(k + l + m)$, а это значит, что количество всех чисел кратно 4.

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел, но при этом их число кратно 4.

41 42 43 44 45 46 47

Вывод: этих чисел может быть только 44.

ДЕМО-2015. ЗАДАНИЕ №21 – РЕШЕНИЕ Б).

1 балл

Пусть среди написанных чисел k положительных, l нулей и m отрицательных. Тогда количество всех написанных чисел равно $k + l + m$.

Сумма всех написанных чисел равна $-3 \cdot (k + l + m)$.

Сумма всех положительных чисел равна $4k$.

Сумма всех отрицательных чисел равна $-8m$.

Нужно сравнить k и m.

Для этого составим равенство $4k - 8m = -3 \cdot (k + l + m)$, то есть $7k + 3l = 5m$, из этого следует $7k \leq 5m$.

Отсюда очевидно: $k \leq m$.

Вывод: отрицательных чисел больше.

ДЕМО-2015. ЗАДАНИЕ №21. В).

1 балл

Пусть среди написанных чисел k положительных, l нулей и m отрицательных. Тогда количество всех написанных чисел равно $k + l + m = 44$.

Сумма всех написанных чисел равна $-3 \cdot 44 = -132$

Сумма всех положительных чисел равна $4k$.

Сумма всех отрицательных чисел равна $-8m$.

Тогда получаем, что $4k - 8m = -132$, то есть $k = 2m - 33$, но при этом $k + m \leq 44$.

Отсюда получим: $3m \leq 77$. Значит, $m \leq 25$.

Но нас интересуют положительные числа, тогда снова используем равенство $k = 2m - 33 \leq 25 \cdot 2 - 33 = 17$

Вывод: положительных чисел может быть не более 17.

ДЕМО-2015. ЗАДАНИЕ №21 ... В).

1 балл

Мы ещё не ответили на вопрос задачи В), так как вывод: положительных чисел может быть не более 17, - это только оценка границ числа *k*.

Необходимо подобрать соответствующий пример, в котором будет именно 17 положительных чисел, причём способ подбора этого примера не нужно записывать. Здесь нужен только подходящий ответ.

Например, можно дать такой пример:

На доске 17 раз записана четвёрка, 25 раз записано число - 8 и 2 раза записан нуль. Этот набор вполне соответствует условиям , но можно подобрать и какой-нибудь другой пример.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- **Числовые множества**
- **Делимость**
- **Чётность**
- **Деление с остатком**
- **Каноническое разложение**
- **Взаимно простые числа**
- **Последовательности: арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия**
- **Метод «Оценка плюс пример»**

Необходимая теория

Числовые множества

Натуральные числа (N) – это числа 1, 2, 3, …

Целые числа (Z)– это числа 0, ±1; ±2; ±3; …

Рациональные числа (Q) – Это все возможные дроби вида $\frac{m}{n}$, где m – целое, а n – натуральное.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- **Делимость**

Понятие делимости относится к целым числам.

Определение: Число a делится на число $в \neq 0$, если найдётся такое число c, что $a = вc$.

Наболее важные признаки делимости:

- На 2 $\Longleftrightarrow$ Последняя цифра есть 0, 2, 4, 6
- На 5 $\Longleftrightarrow$ Последняя цифра есть 0 или 5
- На 10 $\Longleftrightarrow$ Последняя цифра есть 0
- На 3 $\Longleftrightarrow$ Сумма цифр делится на 3
- На 9. $\Longleftrightarrow$ Сумма цифр делится на 9

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- **Чётность**

Наиболее важные свойства:

- **Сумма любого числа чётных слагаемых чётна.**
- **Сумма чётного числа нечётных слагаемых чётна. Сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётна.**
- **Пусть имеется произведение нескольких множителей. Если все множители нечётны, то произведение нечётно. Если хотя бы один из множителей чётный, то произведение чётно.**

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- **Деление с остатком**

Любое число a можно разделить с остатком на любое число $b \neq 0$. То есть найдутся такие числа q и r (q – частное, r – остаток), такие, что $a = bq + r$, и при этом будет выполнено неравенство $0 \le r < b$

Упражнение 4:

Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- **Каноническое разложение**

Всякое число делится на 1 и на само себя. Если число p не равно 1 и не имеет других натуральных делителей кроме 1 и p, то такое число p называется простым.

Число, не равное 1 и не простое, называется составным

Упражнение 1: Число $3^{2015}-1$ является составным. Почему?

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- **Каноническое разложение**

Упражнение 3. Пусть p и q– простые числа. Сколько делителей у числа а) pq; б) q^3p^2; в) q^mp^n?

Разложение на простые множители с точностью до порядка множителей является единственным (Основная теорема арифметики)

и называется **каноническим**.

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- **Взаимно простые числа**

Определение: Числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей кроме 1

Свойства взаимно простых чисел.

Пусть *а* и *в* взаимно простые числа. Тогда:

- **Если некоторое число делится на *а* и *в* , то оно делится и на их произведение *ав* .**
- **Если *ап* делится на *в* , то *п* делится на *в* .**

Упражнение: Какие цифры можно вставить вместо звёздочек в записи 35*4*, чтобы полученное число делилось на 45?

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- **Последовательности:**

Упражнение: Между числами 27 и 64 вставьте два числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

Геометрическая прогрессия:

Определение $b_{n+1} = b_n q \quad (n = 1, 2, \dots)$

Формула n-го члена геом.пр. $b_n = b_1 q^{n-1}$

Сумма n первых членов геом.пр. $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Свойство геом.пр. : Если числа a, b и c образуют геометрическую прогрессию, то $b^2 = ac$

НЕОБХОДИМАЯ ТЕОРИЯ

- **Метод «Оценка плюс пример»**

«Оценка + пример» – это специальное математическое рассуждение, которое применяется в некоторых задачах при нахождении наибольших или наименьших значений.

Суть метода: Нужно найти наименьшее значение некоторой величины А. Действуем в два этапа:

1) **Оценка.** Показываем, что выполнено неравенство $A \geq \alpha$.
2) **Пример**. Предъявляем пример, когда достигается равенство $A = \alpha$.

МЕТОД «ОЦЕНКА ПЛЮС ПРИМЕР»

- **Пример 1(простой):** Найти наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Пример 2 (средний): Натуральные числа от 1 до 10 разбили на 2 группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй группе. Какое наименьшее значение может принимать частное от деления первого произведения на второе?

МЕТОД «ОЦЕНКА ПЛЮС ПРИМЕР»

- Пример 3(серьёзный):

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 6075.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Задача №1. (ЕГЭ-2013 досрочный)

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, $n \geq 3$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найти все возможные n, если сумма значений всех данных чисел равна 111.

Задача №2. (ЕГЭ-2013)

Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписываются на доску в порядке неубывания. ***Например, если задуманы числа 2; 3 и 5, то на доске будет набор 2; 3; 5; 5; 7; 8; 10.***

а) На доске выписан набор : -11; -7; -5; -4; -1; 2; 6. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых задуманных различных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел было задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли можно по этому набору однозначно определить задуманные числа?

Задача №3. (ЕГЭ-2014 диагностический вариант)

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 720 и

а) 5

б) 4

в) 3

из них образуют геометрическую прогрессию?

Ответ: ***нет; нет; да.***

Задача №4. (ЕГЭ-2014 диагностический вариант. Республиканская олимпиада 1989 года)

Решите в натуральных числах уравнение $a! + 5a + 13 = b^2$.

Подсказка: Перебор вариантов

Ответ: $a = 2$, $b = 5$.

ЗАДАЧА №5. (ЕГЭ-2014 ДОСРОЧНЫЙ ВАРИАНТ. 28 АПРЕЛЯ)

На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k ?

Ответ: ***нет; да; 6***

ЗАДАЧА №6. (ЕГЭ-2014 5 июня)

На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 5. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Ответ: *нет; да; 110.*

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ МАТЕРИАЛЫ:

- Демонстрационный вариант ЕГЭ 2015 года
- Яковлев И.В. «Материалы по математике. MathUs.ru
- Материалы единого государственного экзамена за 2010 – 2014 годы.
- Шевкин А.В., Пукас Ю.О. «ЕГЭ. Задание С6 с решениями и ответами» Издательство «Экзамен» Москва 2011.
- Материалы республиканских олимпиад по математике за 1971 – 2014 годы. (из личного архива)