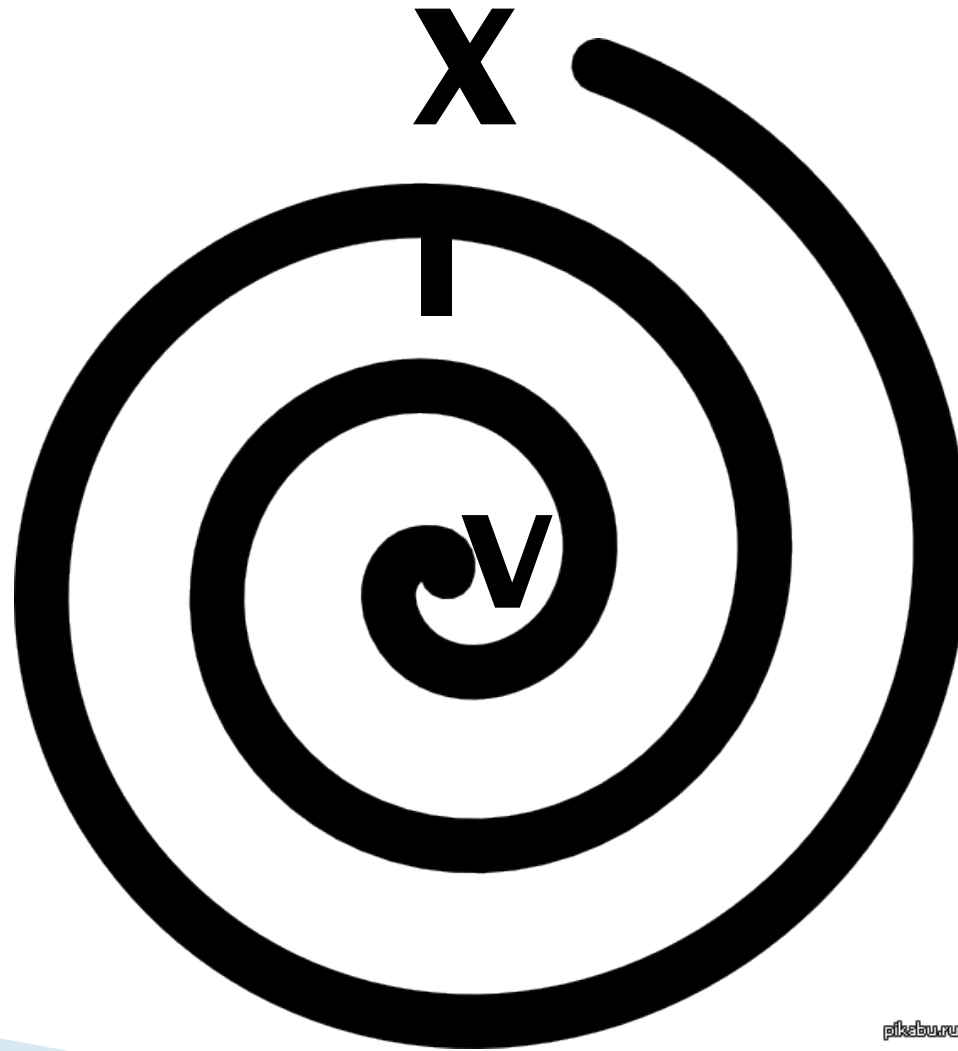


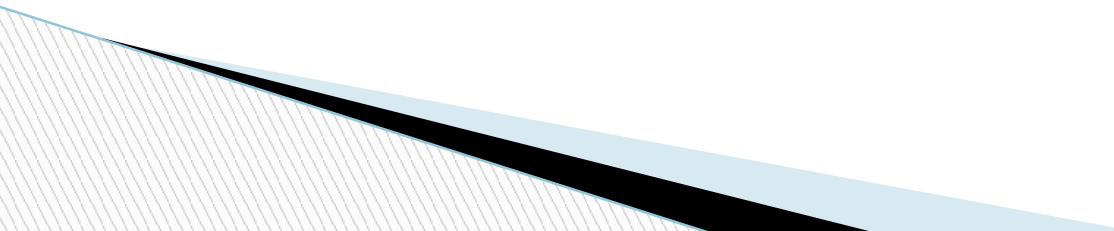
Проценты: от азов до совершенства

Учитель математики
Хатрусова Раиса Дмитриевна
МБОУ «СШ №6» города Смоленска

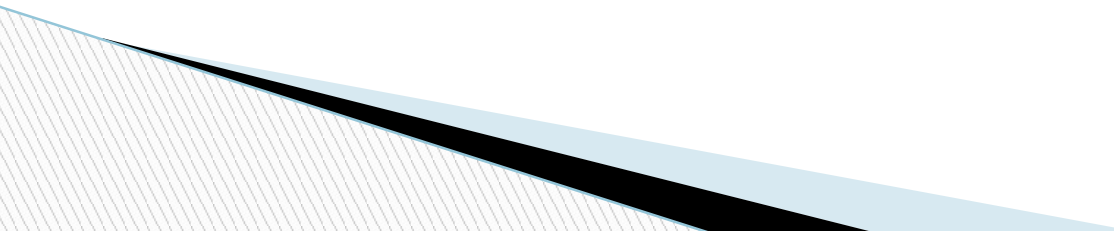
**Изучение темы разворачивается
по спирали.**



Образовательная задача:

- научить учащихся оперировать понятиями «процент», «процентное отношение двух чисел»,
 - переносить полученные знания, умения и навыки в новую ситуацию,
 - выработать умения выполнять действия и преобразования, используя данные понятия.
- 

Краеугольные камни успешности в изучении темы:

- ▣ предметно – практическая направленность деятельности учащихся;
 - ▣ геометрическая наглядность и геометрическое моделирование;
 - ▣ положительная учебная мотивация;
 - ▣ разноуровневое обучение.
- 

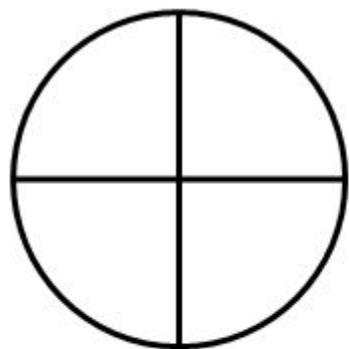
Первый этап изучения – 5-й класс



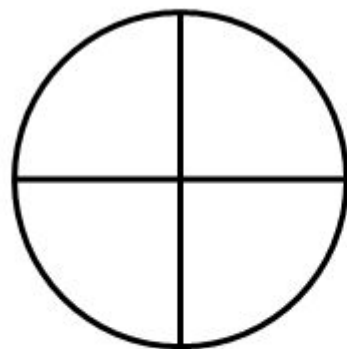
$$\begin{array}{l} 1\% = 0,01 \text{ или } 1\% = \frac{1}{100} \\ 100\% = 1 \end{array}$$

Сотая часть метра – это сантиметр,
сотая часть рубля – копейка,
сотая часть центнера – килограмм.

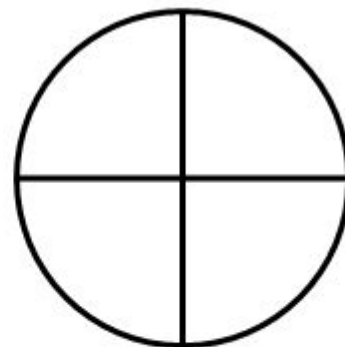
**Заштрихуйте на рисунках
указанную часть круга**



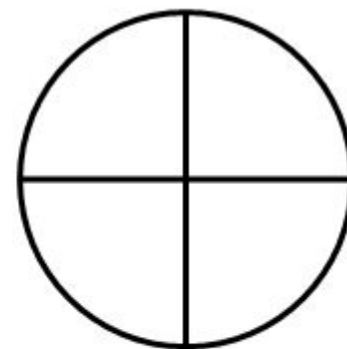
25%



50%

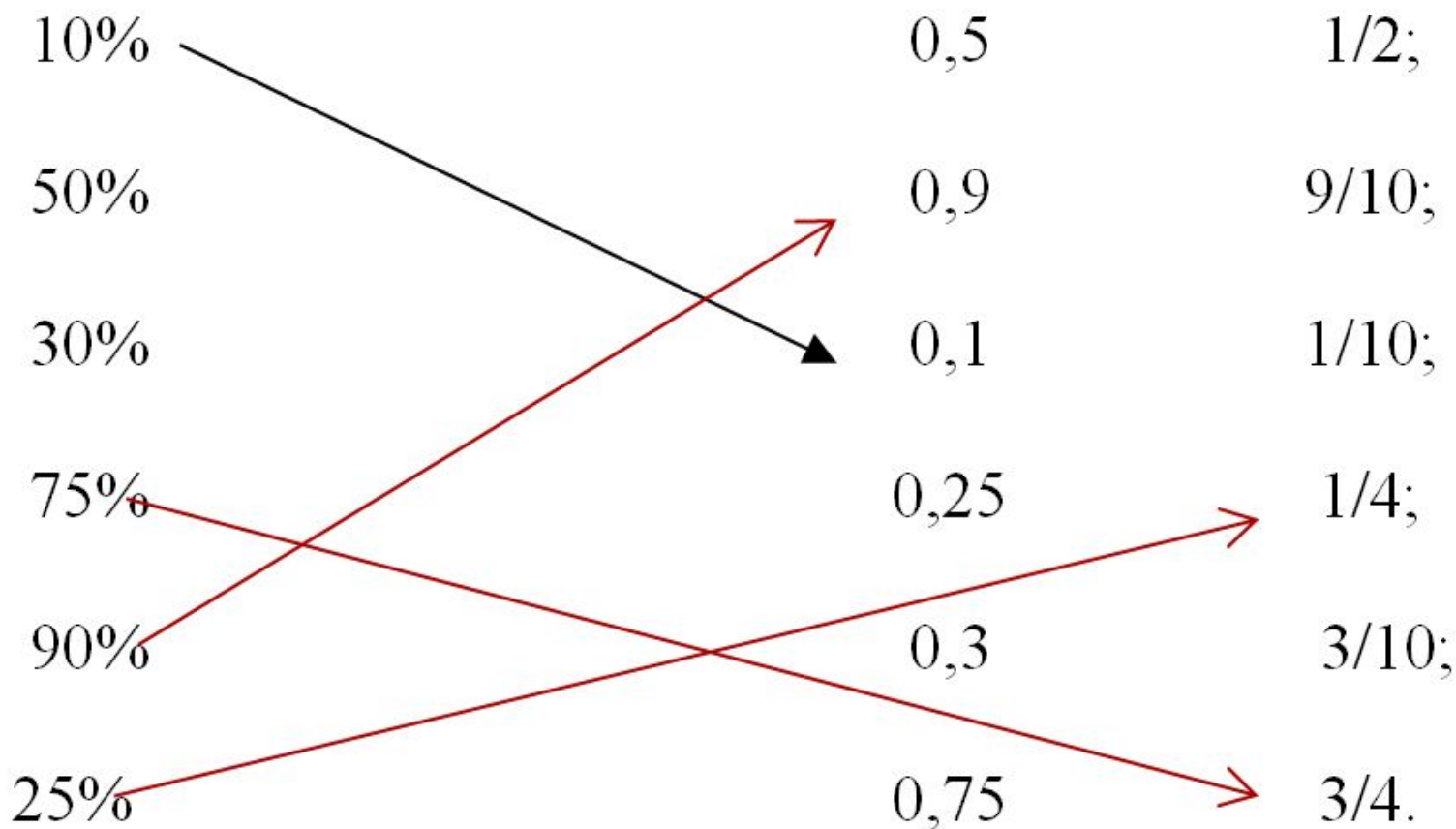


75%



100%

Выберите для каждого процента в левом столбце соответствующую ему дробь:



Для каждой фразы из левого столбца
подберите соответствующую фразу в правом

1. 100 % учащихся школы
2. 25 % учащихся школы
3. 10 % учащихся школы
4. 50 % учащихся школы

- а) половина всех учащихся школы
- б) все учащихся школы
- в) четверть всех учащихся школы
- г) десятая часть всех учащихся школы.

Эквиваленты

25 % величины – это $1/4$ этой величины;

половина некоторой величины – это ее 50 %;

30 % величины втрое больше, чем ее 10 %;

Должны уметь отвечать на вопросы:

1. Туристы проехали 50 % пути на поезде и 40 % пути на автобусе. Весь ли путь они проехали?

2. В классе 40 % девочек. Кого в классе больше – мальчиков или девочек?

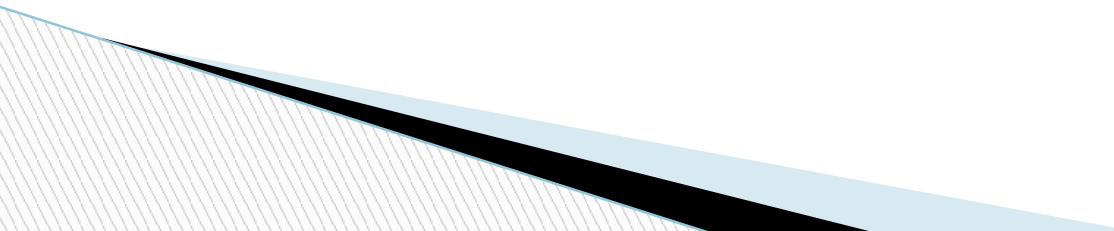
3. Что больше:

а) 60 % всего класса или половина класса?

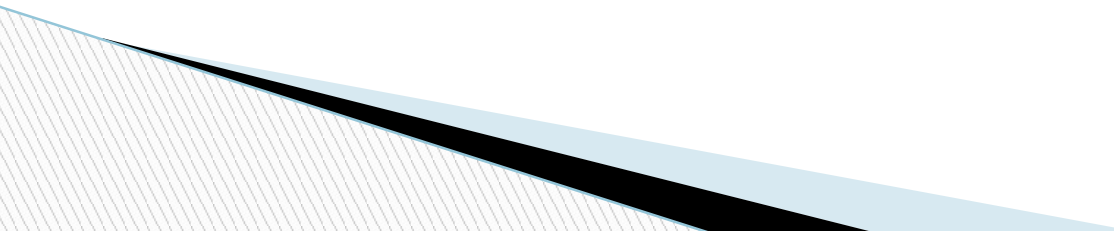
б) 10 % зарплаты или четверть зарплаты?

в) половина или 45 % всего населения страны?

Блиц-опрос

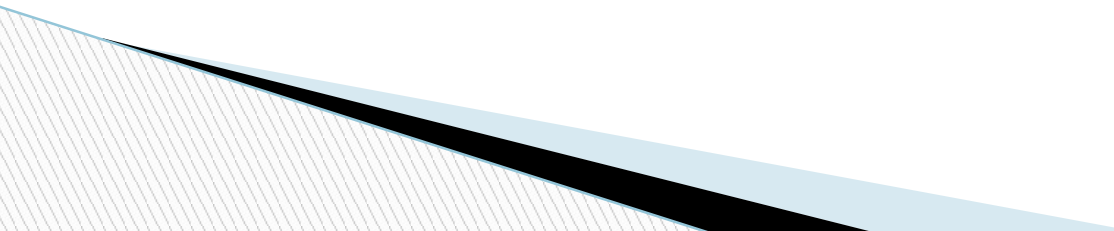
1. На сколько процентов изменилась цена, если она:
а) была 100 руб., а стала 250 руб; б) была 250 руб., а стала 100 руб.
 2. Сколько было, если:
а) после увеличения на 30% стало 520 руб;
б) после уменьшения на 10% стало 450 руб.
 3. В каком случае процентное отношение больше:
8 отличников из 40 учащихся или 9 отличников из 50 учащихся?
 4. Сколько будет, если:
а) 150 руб. увеличить на 300%; б) 500 руб. уменьшить на 10%.
 5. Сравни результаты:
150 руб. увеличили на 50% и 100 руб. увеличили на 100%.
- 

Три вида задач на проценты

- находить несколько процентов от какой-либо величины;
 - находить число, если известно несколько его процентов;
 - находить, сколько процентов одно число составляет от другого.
- 

Второй этап изучения – 6-й класс

Вводится и отрабатывается второй и третий приемы решения задач:

- путем перевода числа процентов в дробь (десятичную или обыкновенную) и далее умножения или деления на дробь,
 - использования пропорций.
- 

Классические олимпиадные задачи

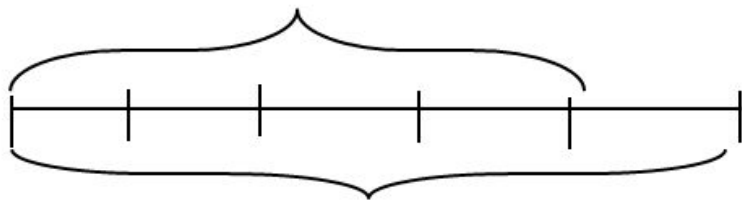
***Книга дороже альбома на 25 %.
На сколько процентов альбом
дешевле книги?***

Решение:

Цена альбома – 100%. Изобразим ее каким либо отрезком. Увеличим этот отрезок на 25 %, т.е. на $\frac{1}{4}$ его часть; получим отрезок, соответствующий цене книги.

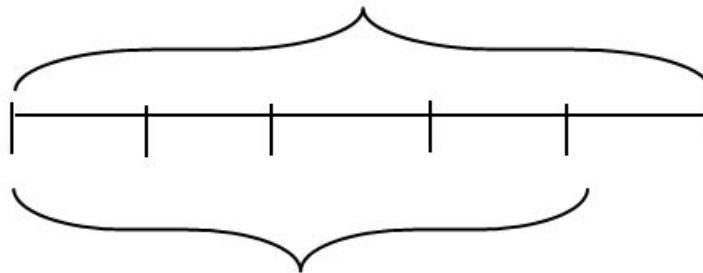
Теперь цена книги составляет 100%. Она изображена большим отрезком. Цена альбома меньше цены книги на $\frac{1}{5}$ этого отрезка. Так как $\frac{1}{5}$ составляет 20 %, то альбом дешевле книги на 20 %.

Цена альбома – 100%



Цена книги на 25 % больше

Цена книги – 100 %



Цена альбома на 20 % меньше

Ответ: на 20 %

Постройте графическую модель и решите следующие задачи:

- 1) Биржевые цены на акции некоторой фирмы уменьшились на 75%. Во сколько раз уменьшились цены?
(в 4 раза).
- 2) На сколько процентов изменилась цена, если она была 100 руб., а стала 250 руб.?
(на 150% возросла)

3) Фабрика в первый месяц выпустила 160 игрушечных автомобилей, в следующем месяце она увеличила выпуск игрушек на 200 %. Сколько игрушечных автомобилей стала выпускать фабрика? Во сколько раз увеличился выпуск игрушечных автомобилей? (480 игрушек; в 3 раза)

160 игрушек



100%



Третий этап изучения – 7-й класс

I тип задач. Как найти 12% от числа 30%?

1 способ. $30:100=0,3$ – в одном 1%
 $0,3*12=3,6$ – в 12%

2 способ. $12\%=0,12$
 $30*0,12=3,6$

3 способ. Краткая запись условия: $30 - 100\%$
 $x - 12\%$,

Составим уравнение в виде пропорции

$$\frac{100}{12} = \frac{30}{x}, \quad \text{тогда } x = \frac{12 \cdot 30}{100} = 3,6.$$

II тип задач. Как найти число, если 18% этого числа равны 90?

1 способ. $90:18=5$ – в одном 1%

$5*100=500$ – все число

2 способ. $18\%=0,18$

$90:0,18=500$

3 способ. Краткая запись условия:

90 – 18%

x – 100%,

Составим уравнение в виде пропорции

$$\frac{18}{100} = \frac{90}{x}, \text{ тогда } x = \frac{100 \cdot 90}{18} = 500$$

III тип задач. Сколько процентов составляет число 24 от числа 120?

1 способ. $24:120=0,2$ – в одном 1%
 $0,2*100=20\%$

2 способ. $24 : 120 = 0,2 = 20\%$

3 способ. Краткая запись условия:

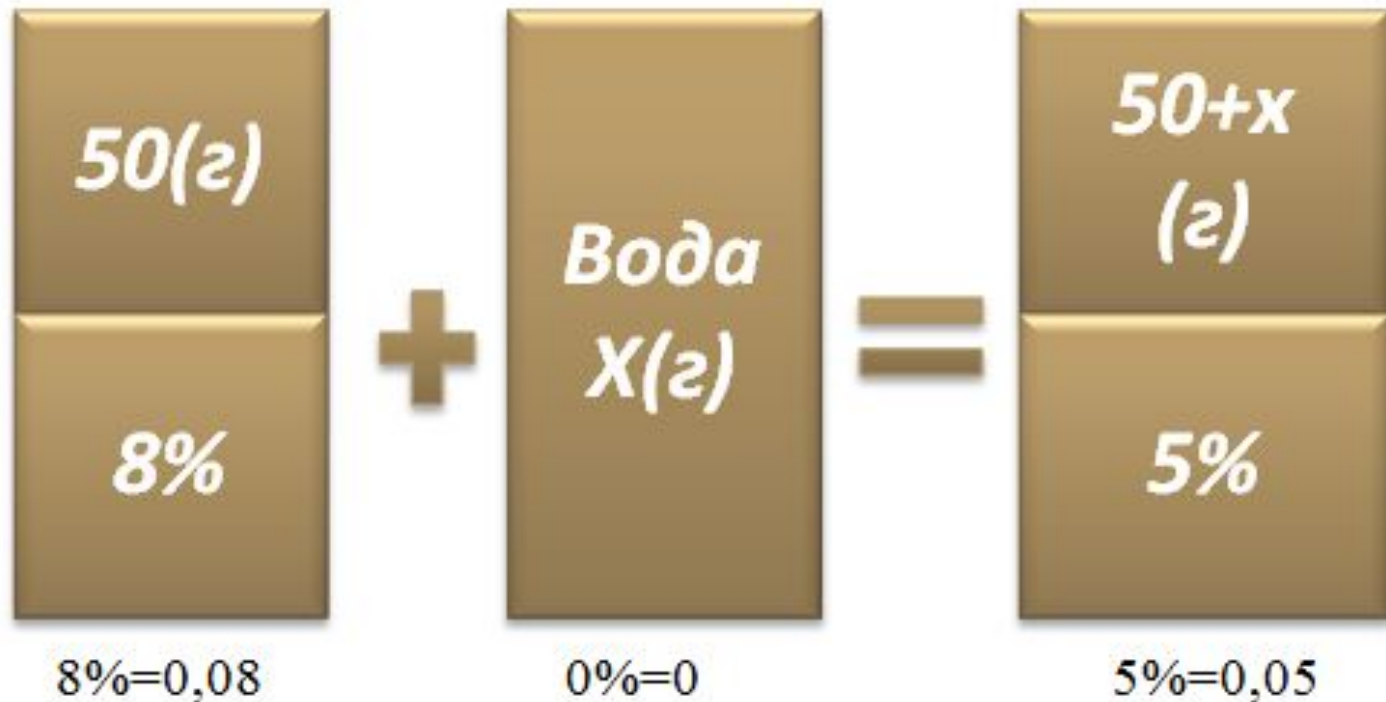
120 – 100%

24 – x %,

Составим уравнение в виде пропорции

$$\frac{120}{24} = \frac{100}{x}, \text{ тогда } x = \frac{100 \cdot 24}{120} = 20.$$

Сколько граммов воды надо добавить к 50 г раствора, содержащего 8% соли, чтобы получить 5%-й раствор?



Уравнение: $50 \cdot 0,08 = 0,05 \cdot (50+x),$
 $x = 30.$

Ответ: 30 г

Можно оформить решение задачи в таблице:

<i>Величины</i>	<i>Дано</i>	<i>Добавлено</i>	<i>Всего</i>
Общая масса в граммах	50	x	$50+x$
Процент кислоты	$8\%=0,08$	$0\%=0$	$5\%=0,05$
Кислота в граммах	$50 \cdot 0,08 = 4$	0	$(50+x) \cdot 0,05$

Разноуровневые задания

В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Задача «на сухое вещество»

Свежий гриб содержит 90% воды,
а сушеный 15%.

Сколько получится сушеных грибов
из 17 кг свежих?

Сколько надо взять свежих грибов,
чтобы получить 3,54 кг сушеных?

Свежий гриб содержит 90% воды, а сушеный 15%.
Сколько получится сушеных грибов из 17 кг свежих?

- 1) $100 - 90 = 10$ (%) - приходится на сухое вещество в свежих грибах.
- 2) $17 : 10 = 1,7$ (кг) - масса сухого вещества в 17 кг свежих грибов и в сушёных грибах.
- 3) $100 - 15 = 85$ (%) - приходится на сухое вещество в сушёных грибах.
- 4) $1,7 : 85 = 0,02$ (кг) - приходится на 1% массы сушёных грибов.
- 5) $0,02 \cdot 100 = 2$ (кг) - масса сушёных грибов.

Ответ: 2 кг сушёных грибов получится из

17 кг свежих грибов.

Сколько получится сушеных грибов из
17 кг свежих?

Вещество	Число %	Масса	Вещество	Число %	Масса
Свежие грибы	100%	17кг	Сушеные грибы	100%	2
Вода	90%		Вода	15%	
Сухое вещество	10%	1,7кг	Сухое вещество	85%	1,7 кг

Классические задачи на проценты для 7-9 классов

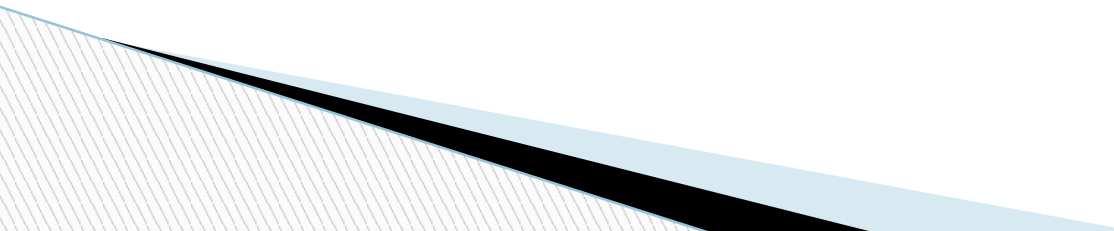
- 1. Как изменится площадь прямоугольника, если его длину и ширину увеличить на 10%? (увеличится на 21%)
- 2. Как изменится площадь прямоугольника, если его длину и ширину уменьшить на 10%? (уменьшится на 19%)
- 3. Как изменится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 30%, а ширину уменьшить на 30%? (уменьшится на 9%)
- 4. Как изменится объем куба, если длину его ребра увеличить на 20? (увеличится на 72,8%)

5. Цену на товар сначала повысили на 15%, а затем снизили на 15%. Сравните окончательную и первоначальную цену товара

(уменьшилась на 2,25%)

6. На распродаже цену на костюм снизили на 20%. На сколько процентов надо повысить новую цену, чтобы вернуться к первоначальной?

(на 25%)



Факультативный (элективный) курс по математике

Название «Учимся решать задачи на проценты»

Класс	7 класс		8 класс		9 класс		10 класс		11 класс	
Количество часов	10 часов		10 часов		9 часов		9 часов		6ч	
Тематика занятий	Проценты. Основные задачи на проценты	2ч	Проценты. Основные задачи на проценты	2ч	Актуализация опорных знаний по теме «Проценты»	1ч	Несколько общих рекомендаций	1ч	Рефлексия знаний по теме «Проценты»	1ч
	Задачи на смеси, сплавы, растворы.	2ч	Задачи, связанные с понятием «процентное содержание», «концентрация»	2ч	Задачи на смеси, сплавы, растворы	2ч	Задачи, связанные с изменением цены	2ч	Проценты в бизнесе и экономике.	1ч
	Простой процентный рост	2ч	Процентные вычисления в жизненных ситуациях: распродажа, тарифы, штрафы.	2ч	Процентные вычисления в жизненных ситуациях: банковские операции.	2ч	Задачи о вкладах и займах	2ч	Решение задач по всему курсу.	2ч
	Сложный процентный рост	2ч	Решение старинных задач. Алгебраические и арифметические способы решения	1ч	Решение задач по всему курсу. Задачи ГИА. Проверочная работа	2ч	Задачи на смеси, сплавы, растворы.	2ч	Задачи ЕГЭ. Проверочная работа.	2ч
	Решение задач по всему курсу. Проверочная работа	2ч	Решение задач по всему курсу. Проверочная работа	2ч	Деловая игра «Проценты в современной жизни»	2ч	Задачи ЕГЭ. Проверочная работа.	2ч	-	
	-		Защита презентаций задач.	1ч	-		-		-	

Учимся решать задачи на проценты

Несколько общих рекомендаций

Прежде всего вспомним, что 1% - это 0,01 или $1/100$

Полезно также запомнить: при решении задач на проценты число, **с которым сравнивают** другое число, принимают за 100%.

Напомним основные соотношения и выражения, встречающиеся при решении задач на проценты.

Предложение «Число a составляет $p\%$ от числа b » выражается равенством $a = b/100 * p$

Предложение «Число a увеличили на $p\%$ » представляется выражением $a(1+0,01p)$.

Предложение «Число a увеличили сначала на $p\%$, а потом еще на $q\%$ » представляется выражением

$$a(1+0,01p)(1+0,01q).$$

Предложение «Число a уменьшили на $p\%$ » представляется выражением

$$a(1-0,01p).$$

Предложение «Число a увеличили на $p\%$, а потом уменьшили на $q\%$ » представляется выражением

$$a(1+0,01p)(1-0,01q).$$

При ответе на вопрос «На сколько процентов число a больше числа b ?» требуется найти значение выражения $(a-b)/b * 100\%$

Задачи, связанные с изменением цены

Пусть S_0 – первоначальная цена некоторого товара,

S – новая (окончательная) цена.

Решение подавляющего большинства задач этого вида опирается на применение следующих формул:

1. После повышения цены товара на $a\%$ ее новое значение

$$S = S_0(1 + a \cdot 0,01),$$

а после понижения цены на $a\%$

$$S = S_0(1 - a \cdot 0,01).$$

2. В результате повышения цены товара на $a\%$ и последующего понижения на $b\%$ ее новое значение

$$S = S_0(1 + a \cdot 0,01)(1 - b \cdot 0,01).$$

Аналогично, если цена сначала понизилась на $a\%$, а потом повысилась на $b\%$, то

$$S = S_0(1 - a \cdot 0,01)(1 + b \cdot 0,01).$$

3. Если цена товара повышалась n раз на $a\%$, то ее окончательное значение $S = S_0(1 + a \cdot 0,01)^n$

а если цена понижалась n раз на $b\%$, то

$$S = S_0(1 - b \cdot 0,01)^n$$

Примеры

$S = S_0(1 - 15 * 0,01)$ цена снизилась на 15%

$S = S_0(1 + 25 * 0,01)$ цена увеличилась на 25%

$S = S_0(1 - 0,0064) = S_0(1 - 0,64 * 0,01)$ цена уменьшилась на 0,64%

Схемы преобразования цены:

Схема I

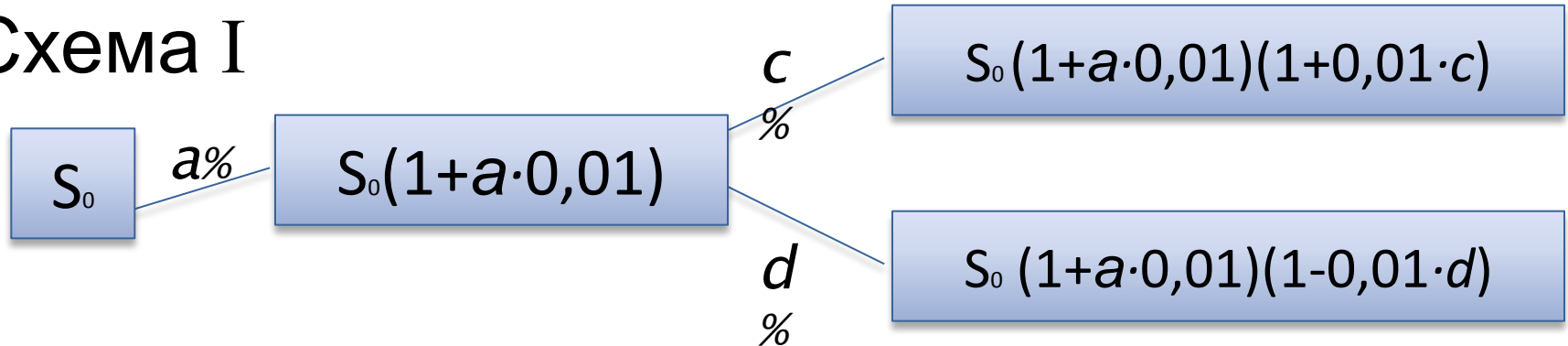
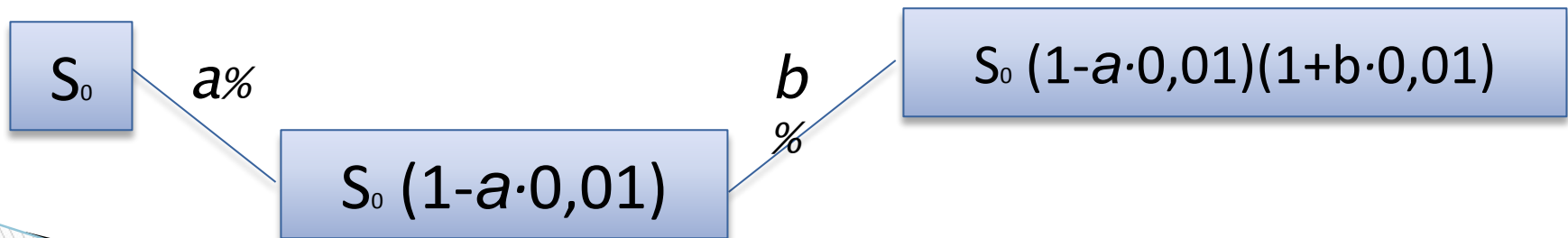


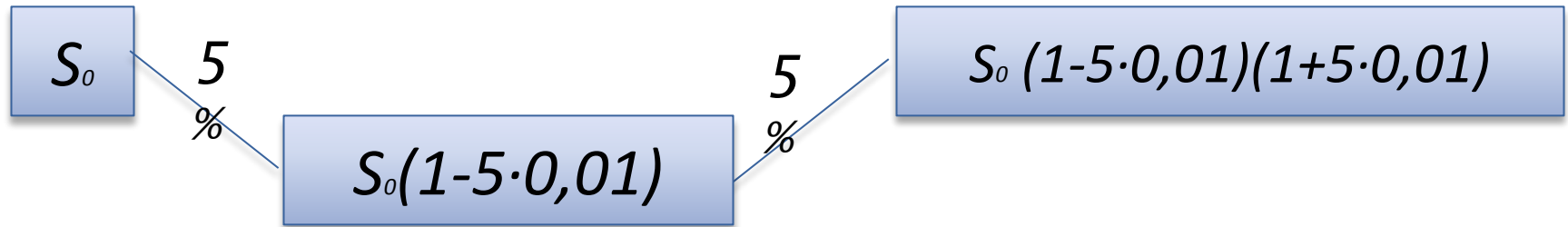
Схема II



Задача 1. Цена товара сначала понизилась на 5%, а затем повысилась на 5%.

Изменилась ли (повысилась или понизилась) первоначальная цена товара, и если «да», то на сколько процентов.

Решение. Составим схему преобразований исходной цены



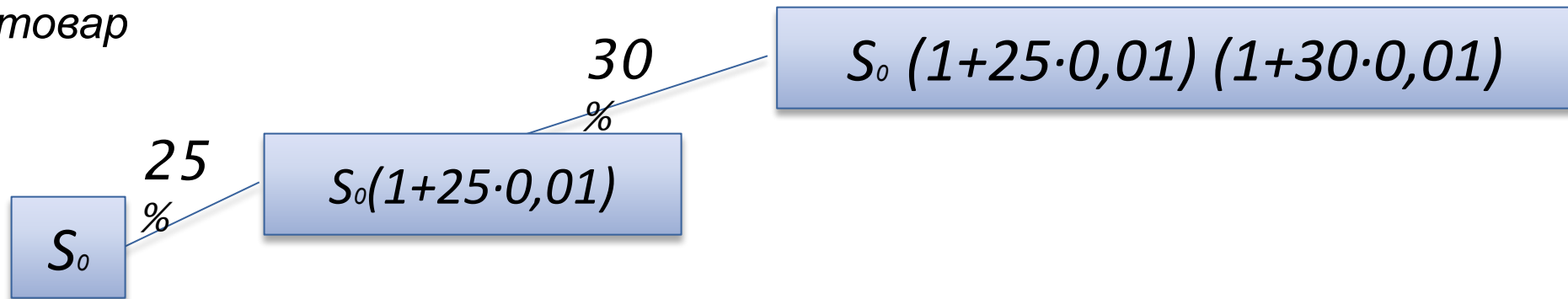
Имеем: $S = S_0(1 - 5 \cdot 0,01)(1 + 5 \cdot 0,01) = S_0(1 - 25 \cdot 0,0001) = S_0(1 - 0,25 \cdot 0,01)$.

Ответ: цена понизилась на 0,25%.

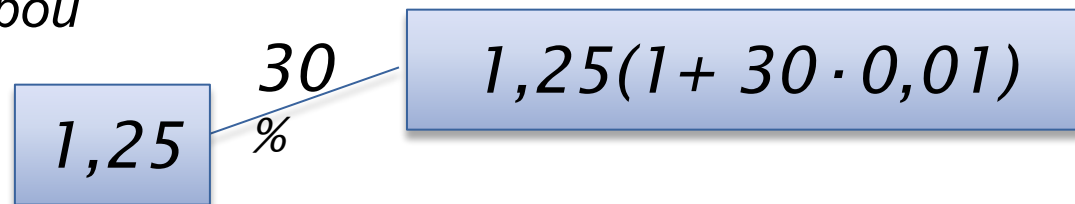
Задача 2. Цена на некоторый товар сначала поднялась на 25%, а потом еще на 30%. Другой товар поднялся в цене на 30%, и его новая цена стала равна новой цене первого товара. Какова исходная цена первого товара, если второй до повышения цены стоил 1,25 тыс. руб.?

Решение. Схемы преобразования цены товаров:

Преобразования цены на первый товар



Преобразования цены на второй товар



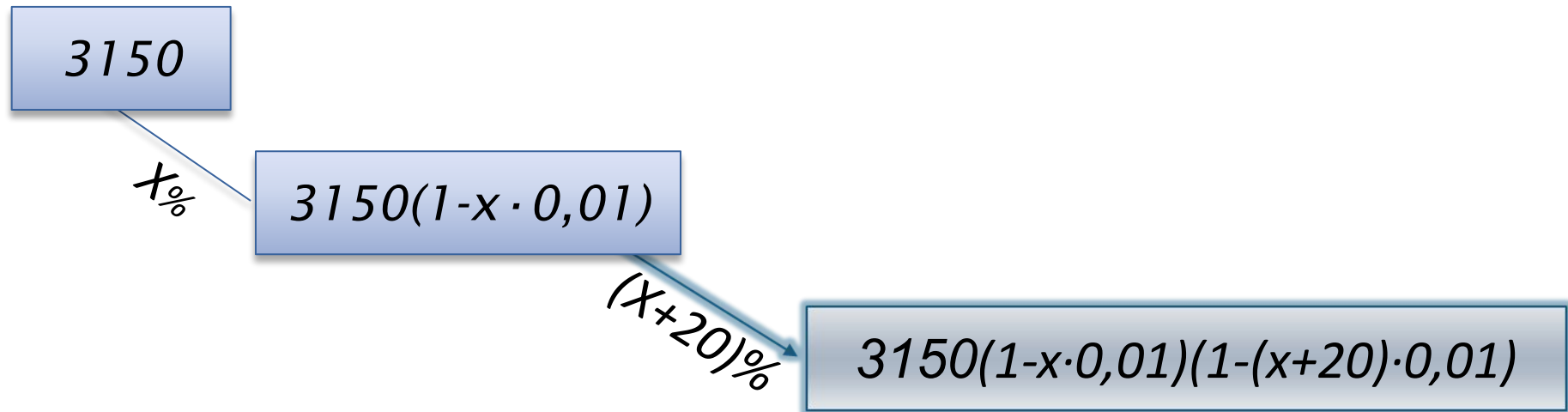
Уравнение: $S_0(1+25 \cdot 0,01)(1+30 \cdot 0,01) = 1,25(1+30 \cdot 0,01)$,
 $S_0 = 1.$

Ответ: 1 тыс.руб.

Задача 3. Некоторый товар стоил 3150 руб. После двух последовательных понижений цены он стал стоить 1512 руб. Сколько стоил товар после первого понижения, если второе понижение было на 20% больше, чем первое?

Решение. Пусть x – процент первого понижения, тогда $(x+20)$ – процент второго понижения.

Схема преобразований цены товара:



Уравнение: $3150(1-x \cdot 0,01)(1-(x+20) \cdot 0,01) = 1512$
 $x = 160$ или $x = 20$.

При $x=20$ получим, что товар стоил после первого понижения 2520 руб.

Задачи о вкладах и займах

При решении задач можно пользоваться соотношениями:

1. Приняв от клиента сумму S_0 под $a\%$ годовых, банк должен выплатить клиенту:

через 1 год сумму $S_0(1+a \cdot 0,01)$

через 2 года $S_0(1+a \cdot 0,01)^2$

через n лет сумму $S_0(1+a \cdot 0,01)^n$

2. Получив в банке кредит на сумму S_0 под $a\%$ годовых, клиент должен выплатить банку:

через 1 год сумму $S = S_0(1+a \cdot 0,01)$

через 2 года $S = S_0(1+a \cdot 0,01)^2$

Через n лет сумму $S = S_0(1+a \cdot 0,01)^n$

	Сумма на начало года	Сумма на конец года	Изменения суммы
1-й год			
2-й год			
...			

Задача 1. Клиент положил деньги в банк под определенный процент годовых и через год снял $\frac{1}{4}$ часть получившейся суммы. На следующий год банк увеличил процент годовых в два раза. К концу второго года сумма вклада превысила первоначальную сумму на 164%. Чему равен новый процент годовых, установленный банком?

Решение. Пусть S_0 - положенная в банк сумма,
 $x\%$ - первоначальный процент годовых.

-	Сумма на начало года	Сумма на конец года	Изменения суммы
1-й год	S_0	$S_0 (1 + x \cdot 0,01)$	Снято со счета $\frac{1}{4} S_0 (1 + x \cdot 0,01)$
2-й год	$\frac{3}{4} S_0 (1 + x \cdot 0,01)$	$\frac{3}{4} S_0 (1 + x \cdot 0,01) \cdot x$ $x(1 + 2x \cdot 0,01)$	-

Уравнение $\frac{3}{4} S_0 (1 + x \cdot 0,01) (1 + 2x \cdot 0,01) = 2,64 S_0$

$x^2 + 150x - 12600 = 0$

$x = 60, \quad x = -210.$

Задача 2. Фермер взял в банке кредит под некоторый процент годовых. Через год в счет погашения кредита он вернул банку $\frac{3}{4}$ всей суммы, которую был должен к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита внес сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Чему равен процент годовых по выданному кредиту?

Решение. Обозначим процент годовых в банке через $x\%$,
 S_0 - сумма выданного кредита.

	Долг на начало года	Долг на конец года	Изменения суммы
1-й год	S_0	$S_0(1 + x \cdot 0,01)$	Вернул часть долга $0,75 S_0(1 + x \cdot 0,01)$
2-й год	$0,25 S_0 (1+x \cdot 0,01)$	$0,25 S_0 (1 + x \cdot 0,01)^2$	Погасил долг полностью

$$\text{Уравнение: } 0,25 S_0 (1+x \cdot 0,01)^2 = 1,21 S_0$$

$$x=120, \quad x= -300$$

Ответ: 120%.

Задача. Первоначальная цена товара была повышена на 20%, а затем новая цена понижена на 10%. Найти процентное отношение последней цены к первоначальной.

Решение. Первоначальная цена товара – x руб. далее ищем изменение цены на 20%, и новой цены на 10%.

Происходит потеря времени. Как избежать этого?

Проценты связаны с числом 100, поэтому примем первоначальную цену товара за 100 руб., и тогда повышение этой цены на 20% сразу же дает 120 руб. А далее традиционное решение.

После понижения цена стала равной 108 руб. и процентное отношение равно $\frac{108}{100} = 1,08$ или 108%.

Благодарю за внимание!
Желаю Вам успехов в
обучении учащихся!

