Задачи линейного программирования

Лекция 3

Линейное программирование

Методы линейного программирования используют в прогнозных расчетах, при планировании и организации производственных процессов.

Линейное программирование – это область математики, в которой изучаются методы исследования и отыскания экстремальных значений некоторой линейной функции, на аргументы которой наложены линейные ограничения.

Такая линейная функция называется **целевой**, а набор количественных соотношений между переменными , выражающих определенные требования экономической задачи в виде уравнений или неравенств, называется **системой ограничений**.

Слово программирование введено в связи с тем, что неизвестные переменные обычно определяют программу или план работы некоторого субъекта.

Совокупность соотношений, содержащих целевую функцию и ограничения на ее аргументы, называется <u>математической моделью задачи оптимизации.</u>

<u>ЗЛП</u> записывается в общем виде так:

$$F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}.$$

$$x_j \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Здесь x_j -неизвестные, a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины. Ограничения могут быть заданы уравнениями.

Наиболее часто встречаются задачи в виде: имеется n ресурсов при m ограничениях. Нужно определить объемы этих ресурсов , при которых целевая функция будет достигать максимума (минимума), т. е. найти оптимальное распределение ограниченных ресурсов. При этом имеются естественные ограничения x_j >0.

При этом экстремум целевой функции ищется на допустимом множестве решений, определяемом системой ограничений, причем все или некоторые неравенства в системе ограничений могут быть записаны в виде уравнений.

В краткой записи ЗЛП имеет вид:

$$F(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,$$

$$x_j \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Для составления математической модели ЗЛП необходимо :

1)обозначить переменные;

2)составить целевую функцию;

3)записать систему ограничений в соответствии с целью задачи;

4)записать систему ограничений с учетом имеющихся в условии задачи показателей.

Если все ограничения задачи заданы уравнениями, то модель такого вида называется <u>канонической</u>. Если хоть одно из ограничений дано неравенством, то модель неканоническая.

Примеры задач, которые сводятся к ЗПЛ.

1. задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии (задача об ассортименте);
2. задача на максимум выпуска продукции при заданном ассортименте;
3. задача о смесях (рационе, диете и т.д.);
4. транспортная задача;
5. задача о рациональном использовании имеющихся мощностей;
6. задача о назначениях.

1.Задача оптимального распределения ресурсов.

Предположим, что предприятие выпускает n различных изделий. Для их производства требуется различных m видов ресурсов (сырья, рабочего и машинного времени, вспомогательных материалов). Эти ресурсы ограничены и составляют в планируемый период $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m$ условных единиц. Известны также технологические коэффициенты a_{ij} , которые указывают, сколько единиц *i*-го ресурса требуется для производства изделия *j*-го вида. Пусть прибыль, получаемая предприятием при реализации единицы изделия *j*-го вида , равна c_j . В планируемый период все показатели $a_{ij},\ b_i,\ c_j$ предполагаются постоянными.

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реализации которого прибыль предприятия была бы наибольшей.

Экономико-математическая модель задачи

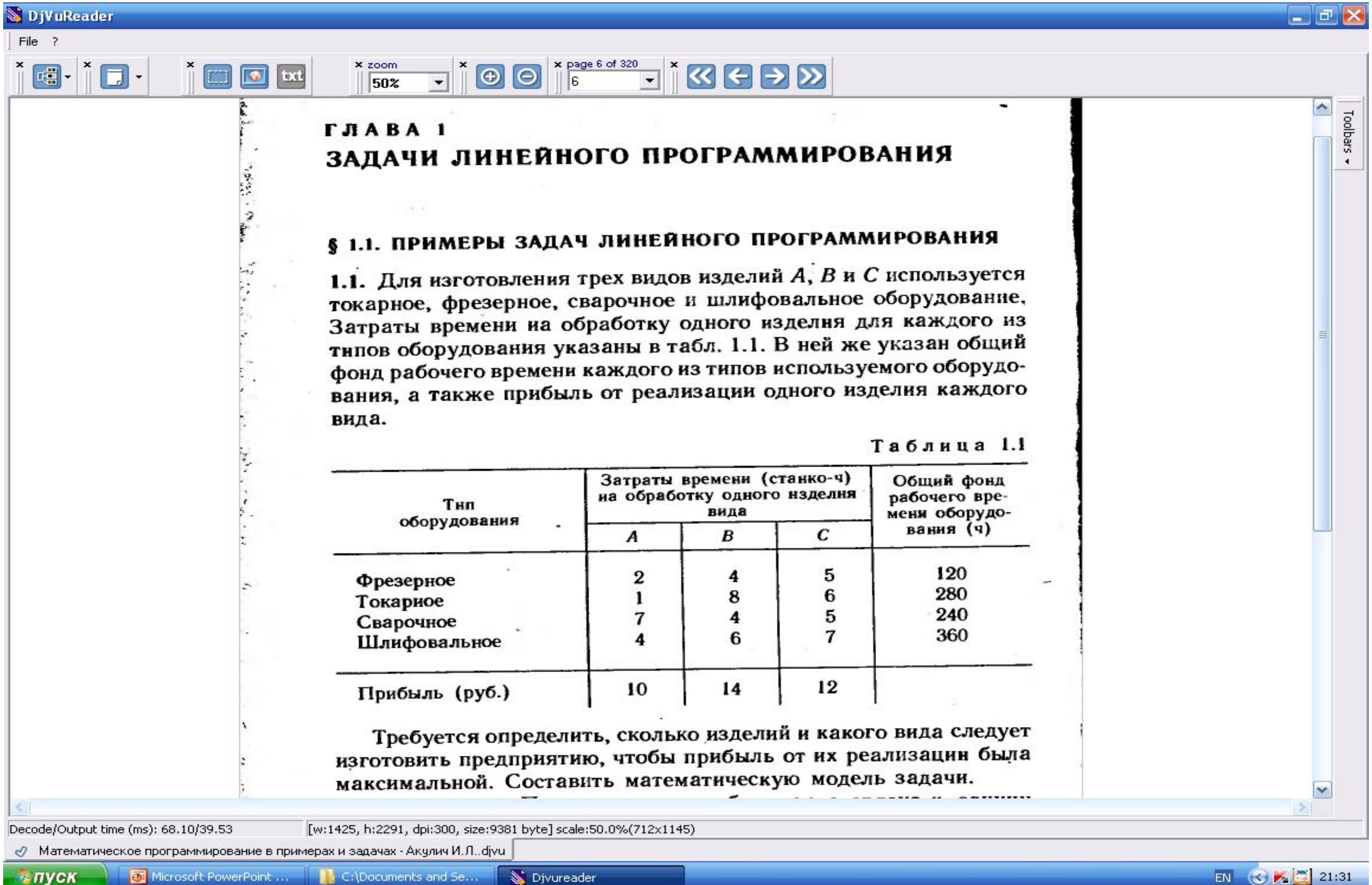
$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \ge 0, \qquad \text{j}=\overline{1, n}.$$

Целевая функция представляет собой суммарную прибыль от реализации выпускаемой продукции всех видов. В данной модели задачи оптимизация возможна за счет выбора наиболее выгодных видов продукции.
Ограничения означают , что для любого из ресурсов его суммарный расход на производство всех видов продукции не превосходит его запасы.

Примеры



ГЛАВА 1

ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1.1. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Для изготовления трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. 1.1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Таблица 1.1

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (ч)
	A	*B*	*C*	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Допустим, что будет изготовлено x_1 изделий вида *A*, x_2 -изделий вида *B* и x_3 -изделий вида *C*. Тогда для производства такого количества изделий потребуется затратить $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станко-часов фрезерного оборудования.

Так как общий фонд рабочего времени станков данного типа не может превышать 120, то должно выполняться неравенство $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120.$

Рассуждая аналогично, можно составить систему ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Теперь составим целевую функцию. Прибыль от реализации x_1 изделий вида *А* составит 10x_1 , от реализации x_2 -изделий вида *В* -14x_2 и от реализации x_3 -изделий вида *С*-12x_3

Общая прибыль от реализации всех изделий составит

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

Таким образом, приходим к следующей ЗЛП:

Требуется среди всех неотрицательных решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360. \end{cases}$$

найти такое, при котором целевая функция

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

принимает максимальное значение.

Пример 2

Продукцией гормолокозавода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в тару. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно1010,1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-часов. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 часов.

Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-часов, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 часов. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции нет ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготовлять заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение

Пусть завод будет производить x_1 т молока, x_2 т кефира и x_3 т сметаны. Тогда ему необходимо

$$1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3$$ кг молока.

Так как завод может использовать ежедневно не более 136000 кг молока, то должно выполняться неравенство

$$1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 136000$$

Ограничения на время по расфасовке молока и кефира $0,18x_1 + 0,19x_2 \le 21,4$

и по расфасовке сметаны $3,25x_3 \le 16,25$.

Так как ежедневно должно вырабатываться не менее100 т молока, то $x_1 \ge 100$.

По экономическому смыслу

$$x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Общая прибыль от реализации всей продукции равна руб. $30x_1 + 22x_2 + 136x_3$ Таким образом, приходим к следующей задаче:

$$F = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 136000, \\ 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4, \\ 3{,}25x_2 \le 16{,}25, \\ x_1 \ge 100, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Так как целевая функция линейная и ограничения заданы системой неравенств, то эта задача является ЗЛП.

Задача о смесях.

Имеется два вида продукции $P_1,\ P_2$, содержащие питательные вещества

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$$

(жиры, белки и т.д.)

Таблица

Питательные вещества	Число единиц питательных веществ в единице продукции		Необходимый минимум питательных веществ
	P_1	P_2	
s_1	1	2	10
s_2	3	2	8
s_3	2	1	9
s_4	2	2	11
Стоимость единицы продукции	3	4	

Решение

Общая стоимость рациона

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \min$$

при ограничениях с учетом необходимого минимума питательных веществ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 11, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

Математическая постановка задачи: составить дневной рацион $\overline{X} = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений и минимизирующий целевую функцию.

В общем виде к группе задач о смесях относятся задачи по отысканию наиболее дешевого набора из определенных исходных материалов, обеспечивающих получение смеси с заданными свойствами. Полученные смеси должны иметь в своем составе *n* различных компонентов в определенных количествах, а сами компоненты являются составными частями *m* исходных материалов.

Введем обозначения: x_j-количество *j*-го материала, входящего в смесь; c_j -цена материала *j*-го вида; -это b_i минимально необходимое содержание *i*-го компонента в смеси.

Коэффициенты a_{ij} показывают удельный вес *i*-го компонента в единице *j*-го материала

Экономико-математическая модель задачи.

$$F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \qquad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Целевая функция представляет собой суммарную стоимость смеси, а функциональные ограничения являются ограничениями по содержанию компонентов в смеси: смесь должна содержать компоненты в объемах, не менее указанных.

Задача о раскрое

На швейной фабрике ткань может быть раскроена несколькими способами для изготовления нужных деталей швейных изделий. Пусть при *j*-ом варианте раскроя $100\,\text{ì}^{2}$ изготавливается b_{ij} деталей *i*-го вида, а величина отходов при данном варианте раскроя равна c_{ij} ì^{2}. Зная, что деталей *i*-го вида следует изготовлять B_i штук, требуется раскроить ткань так, чтобы было получено необходимое количество деталей каждого вида при минимальных общих отходах. Составить математическую модель задачи.

Решение. Предположим, что по *j*-ому варианту раскраивается x_j сотен $\grave{i}^{2}$ ткани. Поскольку при раскрое $100\grave{i}^{2}$ ткани по *j*-ому варианту получается b_{ij} деталей *i*-го вида , по всем вариантам раскроя из используемых тканей будет получено

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{in}x_n = B_i \, (i = \overline{1, m}).$$

Общая величина отходов по всем вариантам раскроя составит

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \, .$$

Таким образом, приходим к следующей задаче:

Найти минимум функции

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = B_i \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1, n})$$

Общая задача линейного программирования.

Опр.1.Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,k}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=\overline{k+1,m}), \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,l},\ l \le n),$$

где $a_{ij},\ b_i,\ c_j$ -заданные постоянные величины и

$$k \le m.$$

Опр.2.Функция (1) называется <u>целевой</u>, а условия (2)-ограничениями задачи.

Опр.3. Совокупность чисел

$$\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$,

удовлетворяющих ограничениям задачи (1)-(2), называются <u>допустимым решением (или планом).</u>

Основная задача ЛП

Опр.4. Основной , или канонической ЗЛП называется задача, состоящая в определении значения целевой функции

$$F(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

при условии, что система ограничений представлена в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}.$$

$$x_j \geq 0,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Если требуется для удобства или по смыслу задачи перейти от одной формы записи к другой , то поступают следующим образом.

Если требуется найти минимум функции, то можно перейти к нахождению максимума, умножив целевую функции на (-1).

Ограничение –неравенство вида $\leq$ можно преобразовать в равенство добавлением к его левой части неотрицательной дополнительной переменной , а ограничение неравенство вида $\geq$ - в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной.

Пример.

Записать в форме основной задачи ЛП задачу: найти максимум функции

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ x_1 + \qquad x_4 - 5x_5 \geq 8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Перейдем от ограничений –неравенств к ограничениям-равенствам.

У нас имеется 4 неравенства, поэтому введем 4 дополнительные переменные.

Тогда запишем уже основную задачу линейного программирования: максимизировать функцию

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + \qquad x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Свойства основной ЗЛП.

Перепишем ЗЛП в векторной форме: найти максимум функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = P_0,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Здесь

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}; P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ldots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

План $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется опорным, если все компоненты базисного решения системы ограничений канонической задачи линейного программирования неотрицательны. Число положительных компонент опорного плана не может быть больше m, т.е.числа уравнений в ограничениях.

Опорный план называется невырожденным, если он содержит m положительных компонент. В противном случае он называется вырожденным.

План, при котором целевая функция ЗЛП принимает свое максимальное (минимальное) значение , называется оптимальным.