

Раздел 6

Собственные частоты и формы колебаний

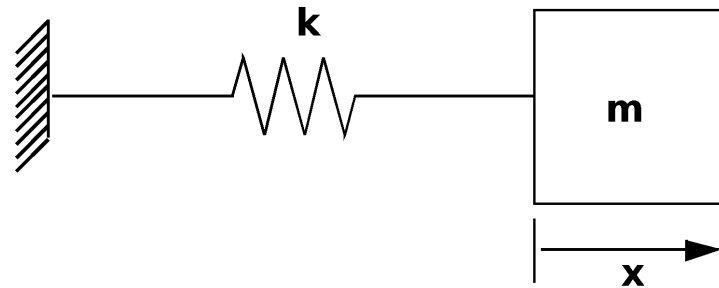


Основные уравнения

- Рассмотрим систему с одной степенью свободы без демпфирования, как показано на рисунке:

где m - масса

k - жесткость



- Уравнение движения при свободных колебаниях (т.е. без внешней нагрузки или демпфирования) выглядит так:

$$m\ddot{x} = -kx$$

или

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Основные уравнения (продолжение)

- Для системы с несколькими степенями свободы уравнение примет вид:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

где $[K]$ - Матрица жесткости (такая же как и в статическом анализе).

$[M]$ - Матрица масс (представляет инерционные свойства конструкции).

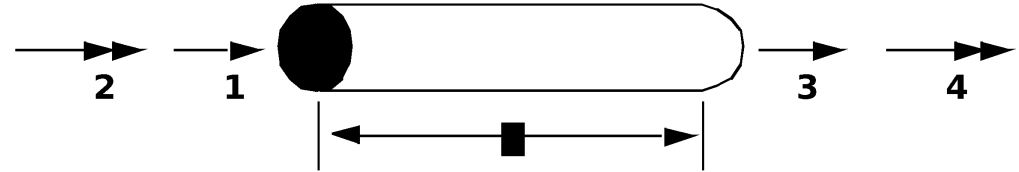
- Матрицы $[K]$ и $[M]$ должны быть вещественными и симметричными.
- **Запомните:**
 - Число степеней свободы равно числу координат, необходимых для описания деформированной формы конструкции в каждый данный момент времени.

Матрица масс

- **Матрица масс** представляет инерционные свойства конструкции.
- **MSC Nastran** предоставляет пользователю две возможности для определения матрицы масс:
- **Несогласованная матрица масс** (используется по умолчанию)
 - Содержит только диагональные члены, связанные с поступательными степенями свободы.
- **Согласованная матрица масс**
 - Содержит также внедиагональные члены, связывающие поступательные степени свободы и вращательные степени свободы.
(Примечание: для стержневых элементов связываются только степени свободы поступательного движения.)

Матрица масс (продолжение)

- Пример матрицы масс



где ρ - массовая плотность

A - площадь сечения

- Несогласованная матрица масс

$$[M] = \rho A L \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Согласованная матрица масс

$$[M] = \rho A L \begin{bmatrix} 5/12 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица масс (продолжение)

- **Согласованная и несогласованная матрицы масс**
- **Согласованная матрица масс, в общем случае, более точная чем несогласованная матрица масс.**
- **Несогласованная матрица масс предпочтительнее с точки зрения скорости расчета при динамическом анализе.**
- **Выбираются пользователем согласованные матрицы масс для элементов:**
 - PARAM,COUPMASS,1 выбирает согласованную матрицу масс для всех элементов BAR, ROD, и PLATE которые включают в себя изгибную жесткость.
 - По умолчанию выбирается несогласованная матрица масс.
- **Элементы, которые могут иметь как согласованную, так и несогласованную матрицу масс:**
 - BAR, BEAM, CONROD, HEXA, PENTA, QUAD4, QUAD8, ROD, TETRA, TRIA3, TRIA6, TRIAX6, TUBE

Матрица масс (продолжение)

- **Элементы имеющие только несогласованную матрицу масс:**
 - CONEAX, SHEAR
- **Элементы имеющие только согласованную матрицу масс:**
 - BEND, HEX20, TRAPRG, TRIARG
- **Несогласованная матрица масс содержит только диагональные компоненты, связанные с поступательным движением (без вращения).**
- **Согласованная матрица масс содержит внедиагональные компоненты, связанные как с поступательным движением, так и с вращательным для элементов типа BAR, BEAM, и BEND.**

Теория

- Рассмотрим уравнение

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$$

- Представим гармоническое решение в виде

$$\{x\} = \{\phi\} e^{i\omega t}$$

- (Физический смысл этого в том, что по всем координатам осуществляется синхронное движение и конфигурация системы не меняет свою форму во время движения, меняется только амплитуда.)
- Из уравнения 6-2 получим

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{\phi\} e^{i\omega t}$$

Теория (продолжение)

- Подставив уравнения (6-2) и (6-3) в уравнение (6-1), получим:

$$-\omega^2 [M] \{\phi\} e^{i\omega t} + [K] \{\phi\} e^{i\omega t} = 0$$

которое, после преобразования примет вид:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\phi\} = 0$$

- Это обобщенная проблема на собственные значения.

Теория (продолжение)

- Поэтому, существует два варианта решения данного уравнения:

1. Если $\det ([K] - \omega^2 [M]) \neq 0$, то из уравнения (6-4) следует, что есть только одно решение:

$$\{ \varphi \} = 0$$

- это, так называемое, тривиальное решение, которое с физической точки зрения интереса не представляет

2. Тогда, чтобы получить нетривиальное решение относительно $\{ \varphi \}$, необходимо, чтобы:

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

Теория (продолжение)

- Проблема собственных значений сводится к решению уравнения

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

или

$$\det ([K] - \lambda [M]) = 0$$

где

$$\lambda = \omega^2$$

Теория (продолжение)

- Если конструкция имеет N динамических степеней свободы (степеней свободы с массой), то имеется N чисел ω , которые будут решением проблемы собственных значений. Эти ω ($\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$) и есть собственные частоты, так же известные как резонансные частоты, основные частоты и частотные характеристики.
- Собственный вектор $\{\phi_j\}$ связанный с собственной частотой ω_j и называется **собственной формой** или формой колебаний. Собственная форма соответствует отклонению модели от состояния покоя.
- Когда конструкция вибрирует, ее форма в каждый момент времени является линейной комбинацией собственных форм колебаний.

Теория (продолжение)

- Пример:

Свободно опертая балка



Форма 1



Форма 2



Форма 3



и т. д.

Для чего нужно вычислять собственные частоты и формы колебаний

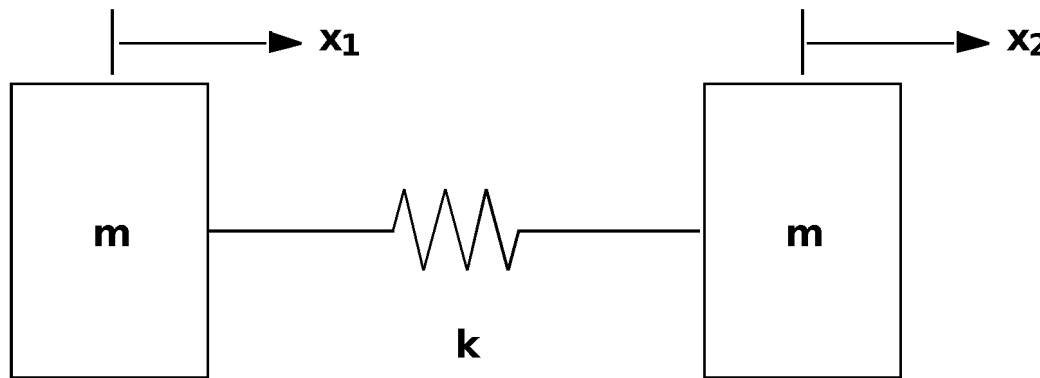
- **Для определения динамических характеристик конструкции.**
 - Например, если вращающийся механизм помещается в некоторую конструкцию, то для избежания чрезмерных вибраций желательно проверить насколько близки его частоты вращения к собственным частотам конструкции.
- **Для определения динамического усиления нагрузки.**
- **Собственные частоты и формы используются для того, чтобы знать как проводить последующий динамический анализ**
 - (нестационарные процессы, спектральный анализ), например, если требуется выбрать подходящий временной шаг δt для интегрирования уравнения движения в нестационарном анализе.

Для чего нужно вычислять собственные частоты и формы колебаний (продолжение)

- Для использования собственных частот и форм при последующем динамическом анализе, например, в анализе нестационарных процессов с использованием модальных методов.
- Для проведения экспериментальных исследований, например, для определения местонахождения акселерометров и т. д.

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний

- Если конструкция не полностью закреплена, например, допускается перемещение ее как твердого тела (форма колебаний без напряжений) или механизма, то как минимум одна собственная частота будет равняться нулю.
- Пример: Следующая не закрепленная конструкция может перемещаться как твердое тело.



$$\omega_1 = 0 \{ \phi_1 \} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний

(продолжение)

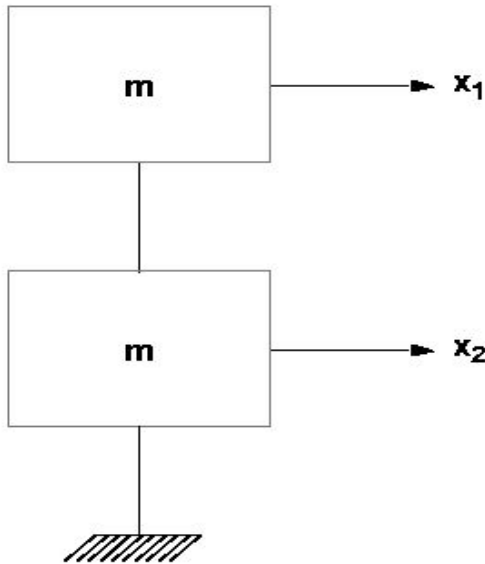
- Собственные частоты ($\omega_1, \omega_2, \dots$) имеют размерность *радиан/с*. Они также могут быть представлены в герцах (цикл/с), с помощью выражения

$$f_j(\text{герц}) = \frac{\omega_j(\text{радиан} / \text{с})}{2\pi}$$

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний

(продолжение)

- Масштабирование собственных форм произвольное. Например:



$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix}, \quad \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 300 \\ 150 \end{Bmatrix}, \quad \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} .66 \\ .33 \end{Bmatrix}$$

представляют одну и ту же "форму колебаний"

Важные замечания относительно анализа собственных частот и форм колебаний (продолжение)

- Определение собственных частот, т. е., решение уравнения

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

является сложной задачей.

- Для решения этой задачи должны применяться численные методы.

Методы вычислений

- **MSC Nastran предоставляет пользователю следующие три подхода к нахождению собственных значений:**
- **Метод итераций**
 - Собственные значения (или собственные частоты) определяются одно за другим методом итераций. Имеются два варианта метода INV и SINV. Эти методы наиболее удобны при определении нескольких собственных частот. В общем SINV более надежен, чем INV.
- **Метод трансформаций**
 - Общая проблема собственных значений

$$([K] - \lambda[M])\{\phi\} = 0$$

Методы вычислений (продолжение)

преобразуется в форму:

$$[A] \{ \phi \} = \lambda \{ \phi \}$$

- Затем матрица $[A]$ трансформируется в трехдиагональную матрицу, с использованием методов Гивенса или Хаусхольдера.
В конце концов, все собственные значения извлекаются одновременно с использованием QR алгоритма.
Имеются два варианта метода Гивенса и два варианта метода Хаусхольдера: GIV, MGIV, HOU и MHOU.
Эти методы более эффективны, когда требуется определить большое количество собственных значений

Методы вычислений (продолжение)

- **Метод Ланцоша**

- Это рекомендуемый метод, который является комбинацией методов итераций и трансформаций. Этот метод наиболее эффективен для расчета малого числа собственных значений в больших разреженных задачах
(большинство КЭ моделей попадают в эту категорию).

Записи для анализа собственных частот

- Секция **EXECUTIVE CONTROL**

- SOL 103

- Секция **CASE CONTROL**

- METHOD=x Номер указывающий на записи EIGR или EIGRL, имеющиеся в секции BULK DATA.

С дополнительным множителем могут быть использованы сразу несколько SUBCASE

- Секция **BULK DATA**

- EIGR Запись для нахождения собственных значений

или

- EIGRL Запись для метода Ланцоша.
 - Требуются массовые свойства.

Массовые свойства

- **Конструкционная масса**

- Добавляет массу элементов
(например, для расчета гравитационного эффекта)

Плотность в записях
MATi,
единицы =
("масса"/объем)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAT1	MID	E	G	NU	RHO				
MAT1	1	10.+7		0.3	0.1				

- **Не конструкционная масса**

- Добавляет массу (пример – нагрузка на строительное перекрытие, нагрузка на грузовой корабль)

Массовые свойства (продолжение)

- Масса на единицу размера (масса на единицу площади в данном случае)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PSHELL	PID	MID1	T	MID2	$121/T^3$	MID3	TS/T	NSM	
PSHELL	2	1	0.1	1		1		0.15	

- **Сосредоточенная масса**
 - Явные массовые свойства в узле (CONM2)
(отступ центра тяжести сосредоточенной массы от узловой точки, моменты, инерционные характеристики)

Массовые свойства (продолжение)

- **Единицы массы**

- Программа подразумевает что размерности инерции:

lb-sec²/ft (ft-lb-sec система)

кг-сек²/м

- PARAM,WTMASS умножает входные данные для получения размерности инерции. Обычно используется для замены весовых размерностей на массовые.
- Пример:
 - Плотность (RHO) стали задана как 490.0 lb/ft³ в MAT1.
 - Используйте PARAM,WTMASS,.031056, который умножит элементы матрицы масс конструкции на 1/g (= 1/32.174 ft/sec²) для того, чтобы перевести плотность в соответствующие единицы инерции.

Массовые свойства (продолжение)

• Генератор весов узловых точек

PARAM,GRDPNT,0

OUTPUT FROM GRID POINT WEIGHT GENERATOR
REFERENCE POINT = 0

M O							
*	4.322800E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	2.417940E+00	-2.161400E+01	*
*	0.000000E+00	4.322800E+00	0.000000E+00	-2.417940E+00	0.000000E+00	4.322800E+01	*
*	0.000000E+00	0.000000E+00	4.322800E+00	2.161400E+01	-4.322800E+01	0.000000E+00	*
*	0.000000E+00	-2.417940E+00	2.161400E+01	1.679263E+02	-2.161400E+02	-2.417940E+01	*
*	2.417940E+00	0.000000E+00	-4.322800E+01	-2.161400E+02	5.904396E+02	-1.208970E+01	*
*	-2.161400E+01	4.322800E+01	0.000000E+00	-2.417940E+01	-1.208970E+01	7.532883E+02	*
S							
	*	1.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	*	Матрица преобразования из основной системы координат в систему главных осей инерции	
	*	0.000000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00	*		
	*	0.000000E+00	0.000000E+00	1.000000E+00	*		
DIRECTION							
MASS	AXIS	SYSTEM {S}	MASS	X-C.G.	Y-C.G.	Z-C.G.	Главные массы и соответственно центр тяжести
	X		4.322800E+00	0.000000E+00	5.000000E+00	5.593458E-01	
	Y		4.322800E+00	1.000000E+01	0.000000E+00	5.593458E-01	
	Z		4.322800E+00	1.000000E+01	5.000000E+00	0.000000E+00	
I(S)							
*	5.850388E+01	-2.842171E-14	-3.552714E-15	*	Матрица инерции I(S) в центре тяжести в системе главных осей масс.		
*	-2.842171E-14	1.568072E+02	-3.552714E-15	*			
*	-3.552714E-15	-3.552714E-15	2.129383E+02	*			
I(Q)							
*	5.850388E+01			*	Матрица инерции I(Q) в центре тяжести в системе главных осей инерции.		
*		1.568072E+02		*			
*			2.129383E+02	*			
Q							
*	1.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	*	Матрица преобразования [Q] из S-осей и Q-осей.		
*	0.000000E+00	1.000000E+00	0.000000E+00	*			
*	0.000000E+00	0.000000E+00	1.000000E+00	*			

Примечание: 1. Это стандартный вывод генератора весов узловых точек. Он получается с помощью задания в параметре GRDPNT целого числа, значение которого определяет номер ссылочного узла сетки. Если это число 0 или несуществующий узел, то в качестве ссылочной точки выбирается начало отсчета базовой системы координат.

Запись SUPORT

- **Запись SUPORT в секции Bulk Data**
- **Для вычисления форм колебаний конструкции как твердого тела используются специальные подпрограммы.**
 - **Esthetics** Абсолютные нулевые собственные значения вместо вычисления нулей (для всех методов кроме метода Ланцоша, где программа будет "судить": либо собственное значение должно быть 0.0, либо нет).
 - **Cost** Отдельная подпрограмма, используемая для расчета форм колебаний конструкции как жесткого тела, может значительно уменьшить время CPU

SUPPORT	ID	C	ID	C	ID	C	ID	C	
SUPPORT	16	125							

Запись SUPORT (продолжение)

- **Замечания:**

- Статистически определенный набор закреплений
- Достаточное число закреплений, поддерживающее все моды твердого тела
- Метод Ланцоша использует вычисленные собственные вектора

Записи для анализа собственных частот (продолжение)

- **EIGRL** Рекомендуемая запись для расчета собственных частот

- Описывает данные, необходимые для определения собственных частот или анализа устойчивости методом Ланцоша.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EIGRL	SID	V1	V2	ND	MSGLVL	MAXSET	SHFSCL	NORM	
EIGRL	1	0.1	3.2	10					

Поле Содержание

- SID Идентификатор (уникальное целое положительное число)

Записи для анализа собственных частот (продолжение)

- V1, V2 Частотный анализ: интересующий диапазон частот
 Анализ устойчивости: интересующий диапазон λ
 ($V_1 < V_2$, вещественные числа). Если нужны все формы
 ниже некоторой частоты, задайте V_2 и оставьте поле V_1 пустым.
 Не рекомендуется задавать 0.0 для V_1 , более эффективно
 использовать маленькое отрицательное число или поле его
 пустым
- ND Требуемое число корней (целое положительное число
 или пробел)
- MSGVLV Уровень диагностики (целое число от 0 до 3 или пробел)
- MAXSET Число векторов в блоке (целое число от 1 до 15 или
 пробел)

Записи для анализа собственных частот

(продолжение)

- EIGRL Рекомендуемая запись для расчета собственных частот
- SHFSCL Оценка первой из собственных частот (действительное число или пробел)
- NORM Метод нормирования собственных векторов, одно из BCD значений либо "MASS", либо "MAX".
 - MASS Нормирование по обобщенной массе масс (по умолчанию)
 - MAX Нормирование по наибольшей компоненте

Записи для анализа собственных частот (продолжение)

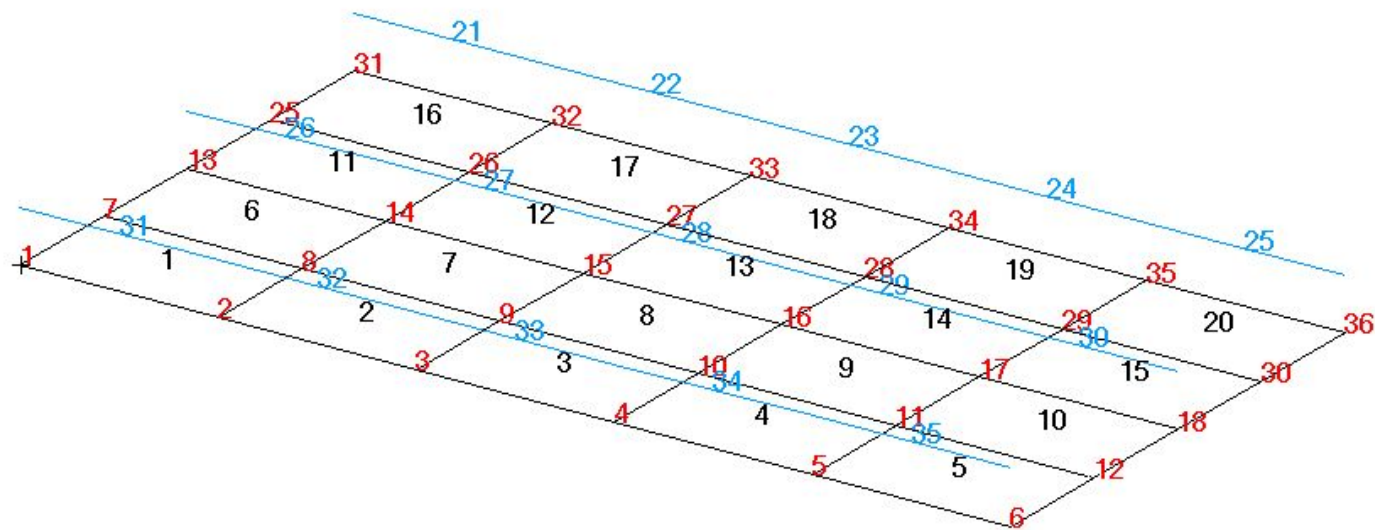
- **Основываясь на входных данных, программа будет:**
 - Рассчитывать все корни ниже V2 (V1 = пустое, V2 = наибольшее интересующее значение собственной частоты, ND - пробел)
 - Рассчитывать максимум ND корней между V1 и V2 (V1, V1, ND - заданы)
 - Рассчитывать ND корней выше V1 (V1 = самое низкое интересующее значение частоты, V2 = пустое, ND = требуемое число корней)
 - Рассчитывать первые ND корней (V1 и V2 пустые, ND = требуемое число корней).
 - Рассчитывать все корни между V1 и V2 (V1 = самое низкое интересующее значение частоты, V2 = наибольшее интересующее значение собственной частоты, ND = пустое)

Пример 8

Анализ собственных частот подкрепленной панели



Анализ собственных частот подкрепленной панели (продолжение)



Анализ собственных частот подкрепленной панели (продолжение)

- **Описание модели**

- Та же самая модель подкрепленной панели, которая была использована в Примере 5.
 - Рассчитайте первые 6 собственных значений частот.
 - Проверьте корректность используемых единиц измерения