



Системы счисления





Системы счисления



Система счисления – способ записи чисел, а также арифметических действий с ними.

Число в математике и информатике - это величина, а не символьная запись.

Цифры – набор символов, участвующих в записи числа.

Алфавит – совокупность различных цифр, используемых для записи чисел.

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

позиционные

352, 23

величина числа зависит
от номера позиции
цифры при его записи

непозиционные

VII, XIX

каждой цифре соответствует
величина, не зависящая от
ее места в записи числа

непозиционные системы счисления

Период палеолита.

10-11 тысяч лет до н.э.

- Единичная
(«палочная»)



|||

или

|||||

см. пример

2,5 тысяч лет до н.э.

Древнеегипетская
десятичная
непозиционная система



999 999 999 ||||| = 3 4 5

| - единицы

9 - десятки

99 - сотни

непозиционные системы счисления

2 тысячи лет до н.э.

■ Вавилонская шестидесятеричная



цифры:



и



 - единицы  - десятки  - 60 ; 60^2 ; 60^3 ; ... ; 60^n

  = 33

 |   = $60 + 20 + 2 = 82$

2-ой разряд 1-ый разряд

пример

$$= 3600 + 30 + 2 = 3632$$

пропущенный шестидесятичный разряд



Шестидесятеричная вавилонская система –
 первая известная нам система счисления,
 основанная на позиционном принципе.

НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ



■ Римская система

500 лет до н.э.

Цифры:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Число формировалось из **цифр**, а также с помощью групп:

Группа 1-го вида - несколько одинаковых подряд идущих цифр: $XX = 20$

Группа 2-го вида - разность значений двух цифр, если слева стоит меньшая:

$$CM = 1000 - 100 = 900$$

Величина числа суммируется из значений цифр и групп **1-го** или **2-го** вида:

$$\underbrace{XXXII}_{= 32} \quad \underbrace{D}_{= 500} \underbrace{XL}_{= 40} \underbrace{II}_{= 2} = 542$$



Это римская древняя табличка, написанная 2000 лет назад.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

$$444 = CD + V$$



$$444 = (D-C) + (L-X) + (V-I)$$

400 + 40 + 4

$$MCLXXIV = 1000 + 50 + 20 + 4$$

$$(M-C) = 1000 - 100 = 900 + 50 + 20 + 4$$



непозиционные системы счисления

■ Алфавитные системы

Древняя Русь

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘ ⌘

$\overline{a}i = 11, \overline{b}i = 12, \overline{g}i = 13, \dots, \overline{z}i = 19, \overline{a} = 40, \overline{Ta} = 301.$



Блѣ. ѿ. м. зѣ.



«... В год 6367. Варяги из заморья
взимали дань...» («Повесть временных лет»)



- тысячи

100 000 - легион

- тьма: $\times 10\ 000$

1000 000 - леодр

= 10 000

$\dots$
50 - колода

«более сего несть человеческому уму разумевати»

непозиционные системы счисления

Древняя Русь



«УЧЕНИЕ – СВЕТ, А НЕУЧЕНИЕ – ТЬМА»

- Какая разница между понятиями «цифра» и «число»?
- Какие следы разных систем счисления сохранились в наше время?



ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Позиционной называют систему счисления, в которой число представляется в виде последовательности цифр, количественное значение которых зависит от места (позиции), которое занимает каждая из них в числе.



1000
(10^3)

100
(10^2)

10
(10^1)

1
(10^0)

4 позиция

1 2 3 5

x 1000
x 100
x 10
x 1

Десятичная система: 1, 10, 10^2 , 10^3 , ..., 10^n

Двоичная система: 1, 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^n

P-ичная система: p^{-n} , p^{-2} , p^{-1} , p^0 , p^1 , ..., p^n

«вес» каждого разряда

основание системы

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

■ Традиционные: P -ичные

Базис системы – геометрическая прогрессия с основанием

p :
Десятичная система $\dots, p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2, p^3, p^4, p^5, \dots$

Пример: 253_{10}

Основание: 10

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Базис: $\dots, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^n$

■ Нетрадиционные

Фибоначчиевая система

Базис: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Алфавит: 0, 1

Пример: $10000100_{\Phi} = 3 + 34 = 37_{10}$

■ Смешанные: P - Q -ичные

Каждая цифра числа, заданного в Q -ичной системе, заменяется ее представлением в P -ичной системе.

Двоично-десятичная система $35809_{10} = 0011\ 0101\ 1000\ 0000\ 1001_{2-10}$



ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

В любой традиционной P -ичной позиционной системе счисления число равно сумме степеней основания:

147,205

$$147,205_{10} = 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,01 + 5 \cdot$$

$$0,001 = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$$

$$X_p = a_n \dots a_1 a_0, b_{-1} \dots b_{-k} \dots p$$

$$X = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0 + b_{-1} P^{-1} + b_{-2} P^{-2} + \dots + b_{-k} P^{-k} + \dots$$



Арифметические действия над числами во всех P -ичных системах счисления выполняются одинаково.

(+ - × ÷

)

..., $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... – базис
(..., 2^{-2} , 2^{-1} , 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , ...)

1 0 1 0 0 1 = $1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 8 + 32 = 41$

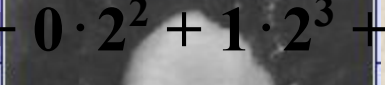
Лейбниц (Leibniz) Готфрид

Вильгельм

(1646-1716)

немецкий философ,

математик, философ, историк



Лейбниц, изрядное

время уделивший

двоичной (бинарной)

математике, видел в ней

«преобразовательную

Задание:

С конца XX века, века компьютеризации, считал, что «единица

100101₂ – вещество; **101101₂** – используется двоичный код для хранения информации; **32 = 2⁵** – ежедневно, так как вся информация, божественное начало, а **1010110₂** – обрабатываемая ОВМ; хранится **2⁴** ниббл = **2⁶** бит; **32** – высшее двоичное значение.

1	2	4	8	16	32	64	128
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7

таким же образом, как

Двоичная система счисления

2 – основание системы

0, 1 – алфавит

0 и 1

Перевод из десятичной системы счисления в двоичную:

	остаток		остаток
$51 : 2 = 25$	1	$76 : 2 = 38$	0
$25 : 2 = 12$	1	$38 : 2 = 19$	0
$12 : 2 = 6$	0	$19 : 2 = 9$	1
$6 : 2 = 3$	0	$9 : 2 = 4$	1
$3 : 2 = 1$	1	$4 : 2 = 2$	0
		$2 : 2 = 1$	0
$51_{10} = 110011_2$		$76_{10} =$	

проверка:

	остаток
$128 : 2 = 64$	0
$64 : 2 = 32$	0
$32 : 2 = 16$	0
$16 : 2 = 8$	0
$8 : 2 = 4$	0
$4 : 2 = 2$	0
$2 : 2 = 1$	0
$77_{10} = 1001101_2$	

$$168_{10} = 10101000_2$$

$$241_{10} = 11110001_2$$

$$77_{10} = 1001101_2$$



задание:



Необыкновенная девочка

Ей было тысяча сто лет, (1100)

Она в сто первый класс ходила, (101)

В портфеле по сто книг носила - (100)

Всё это правда, а не бред.

Когда, пыля десятком ног, (10)

Она шагала по дороге,

За ней всегда бежал щенок

(1) С одним хвостом, зато стоногий. (100)

Она ловила каждый звук

Своими десятью ушами, (10)

И десять загорелых рук (10)

Портфель и поводок держали.

И десять темно-синих глаз (10)

Рассматривали мир привычно...

Но станет всё совсем обычным,

Когда поймете вы рассказ.



Задание 1

Задание 2

Задание 3

Задание 4

Задание 5

Задание 6

Задание 7

Системы счисления



позиционные

- традиционные

100010011_2

- нетрадиционные

10001010_{Φ}

- смешанные

$0011\ 0101_{2-10}$



непозиционные

- единичная

|||||

- древнеегипетская

⤵⤵⤵⤵|||

- вавилонская

∇◀∇∇

- римская

XXXII

- алфавитная

колода

задание

Используя римскую систему
счисления выпишите числа
от 95 до 105

95 = XCV

100 = C

101 = CI

96 = XCVI

102 = CII

97 = XCVII

103 = CIII

98 = XCVIII

104 = CIV

99 = XCIX

105 = CV

- Можно ли любое целое число представить в виде суммы степеней двойки?

Ответ: да.

- Какое максимальное число можно записать в двоичной системе счисления пятью цифрами?

Ответ: $11111_2 = 31_{10}$.

Было 11 яблок. После того как каждое яблоко разрезали пополам, стало 110 половинок.

Возможно ли это? Обоснуйте ответ.

Ответ: да, если считать числа в задаче представленными в двоичной системе счисления:

$$11_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 = 3_{10};$$

$$110_2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 2 + 4 = 6_{10}$$

Определите четное число или нечетное:

а) 101_2

б) 110_2

в) 1001_2

г) 100_2

Сформулируйте критерий четности в двоичной системе.

Ответ: четное число в двоичной системе счисления оканчивается на 0, а нечетное — на 1.

а) $101_2 = 5_{10}$; б) $110_2 = 6_{10}$; в) $1001_2 = 9_{10}$; г) $100_2 = 4_{10}$

**Выпишите алфавит и базис
традиционной позиционной пятеричной
системы счисления.**

Пятеричная система счисления

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4

Базис: ..., 5^{-2} , 5^{-1} , 1, 5, 5^2 , 5^3 , ...

**Переведите данные десятичные числа в
двоичную систему:**

10, 20, 100, 200, 1000

$$10_{10} = 1010_2$$

$$20_{10} = 10100_2$$

$$100_{10} = 1100100_2$$

$$200_{10} = 11001000_2$$

$$1000_{10} = 1111101000_2$$