Sissejuhatus informaatikasse

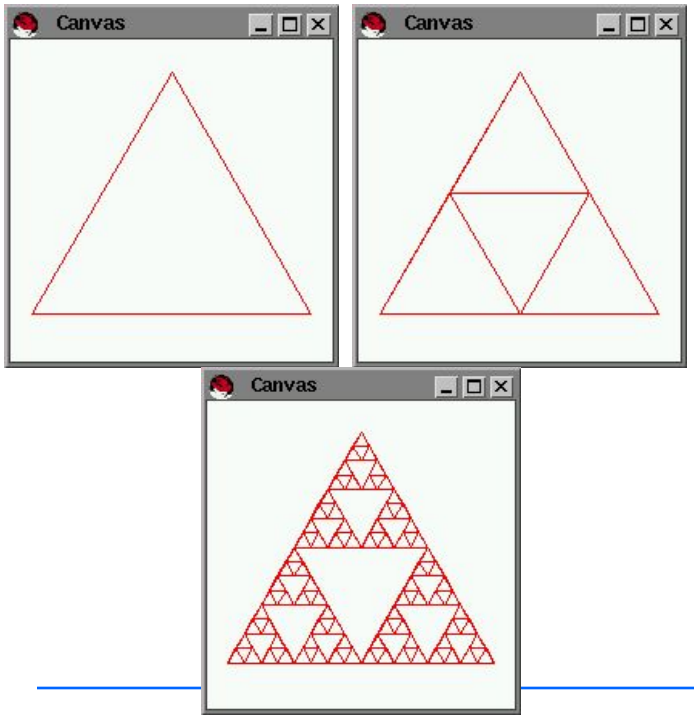
Factorial: trace

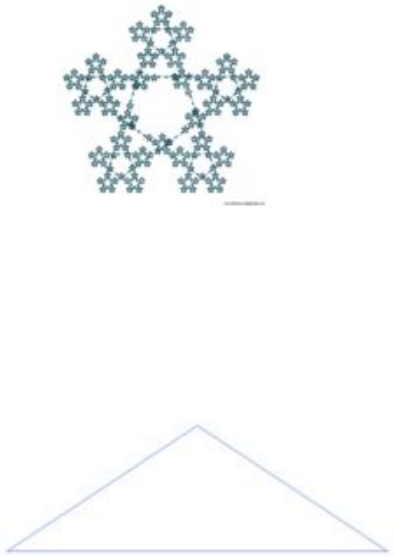
A subroutine is said to be recursive if **it calls itself**, either directly or indirectly. That is, the subroutine **is used in its own definition**.

```
fact(3)
==> 3 * fact(3 - 1)
==> 3 * fact(2)
==> 3 * (2 * fact(2 - 1))
==> 3 * (2 * fact(1))
==> 3 * (2 * (1 * fact(1 - 1)))
==> 3 * (2 * (1 * fact(0)))
==> 3 * (2 * (1 * 1))
==> 6
```

Recursive objects in the world. Fractal objects

- A huge amount of of things in the real world has a recursive nature.
- For example, coastline of a sea has a **fractal** nature – fractals are recursive: their structure is repeated over and over in small details. i.e *it is a rough or fragmented geometric shape that can be subdivided in parts, each of which is (at least approximately) a reduced-size copy of the whole*
- Sierpinski triangle:





Recursion

- A subroutine is said to be recursive if **it calls itself**, either directly or indirectly. That is, the subroutine **is used in its own definition**.
  - Bad kind - infinite loop:
    - a car is a car,
    - ```
      int fact(int x)  {
        return fact(x)
      }
      ```
- Recursion can often be used to solve complex problems by reducing them to simpler problems of the same type.
  - Good kind – loop is (hopefully) terminated:
    - An "ancestor" is either a parent or an ancestor of a parent.
    - ```
      int fact (int x) {
        if (x <= 0) return 1;
        else return x * fact(x-1);
      }
      ```

Recursive functions: main principles

- Important to check that recursion terminates. Code should contain:
  - One or more **base cases** (no recursion involved!)
  - One or more **recursive cases.** Arguments of the recursive call must be "**simpler**" according to some measure.

    NB! The "simplicity" measure may be arbitrarily complex.

Recursive functions: main principles

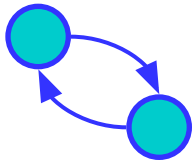
- Recursion has same power as iteration:
  - Every recursive function can be written using while or for loops instead
  - Every function using while and/or for loops can be written using recursion instead
- However:
  - some programming tasks are much easier to write using recursion
  - some programming tasks are much easier to write using iteration

Direct and indirect recursive call

- A recursive subroutine is one that calls itself, either directly or indirectly.

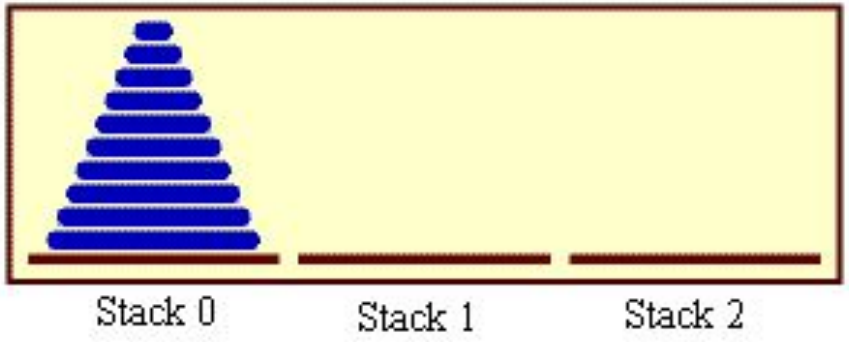
- To say that a subroutine calls itself **directly** means that its definition contains a subroutine call statement that calls the subroutine that is being defined.
  - foo calls foo:
  - int **foo**(int x) { if (x>0) return 1+**foo**(x-1) else return 1}

- To say that a subroutine calls itself **indirectly** means that it calls a second subroutine which in turn calls the first subroutine (either directly or indirectly).
  - foo calls bar which calls foo:
  - int **foo**(int x) { if (x>0) return 2+**bar**(x-2) else return 1}
  - int **bar**(int x) { if (x>0) return 2*+**foo**(x-1) else return 1}



Example: towers of Hanoi

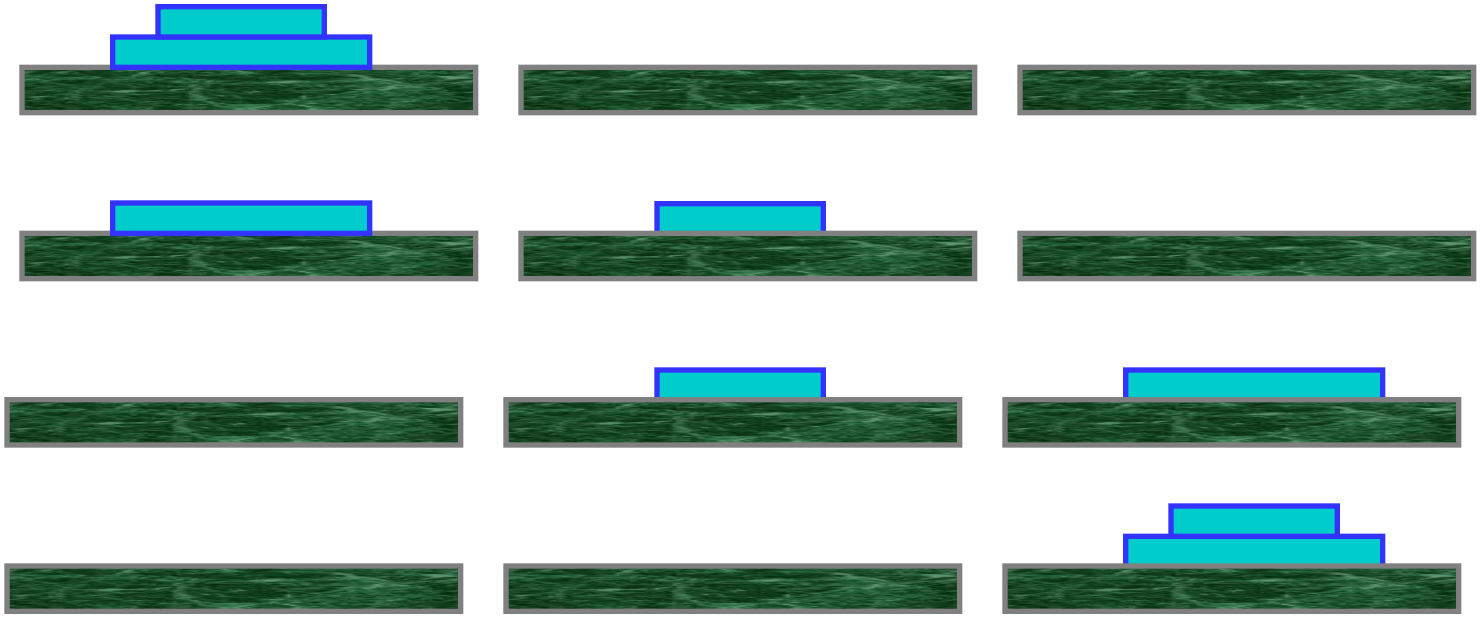
- Goal: move all the disks from Stack 0 to Stack 1
- Stack 2 can be used as a spare location.
- Only one disk at a time may be moved
- A larger disk may never be on the smaller disk



The stacks after a number of moves.

towers of Hanoi

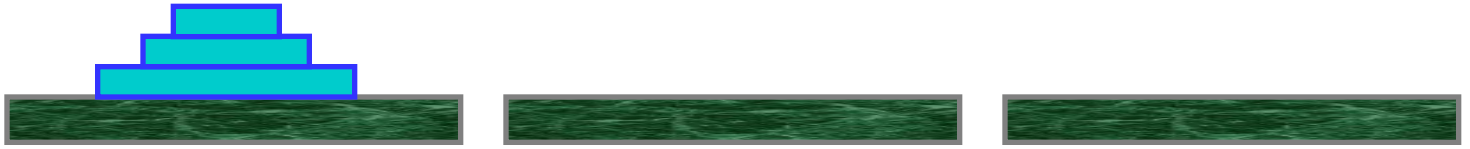
- Move two elements



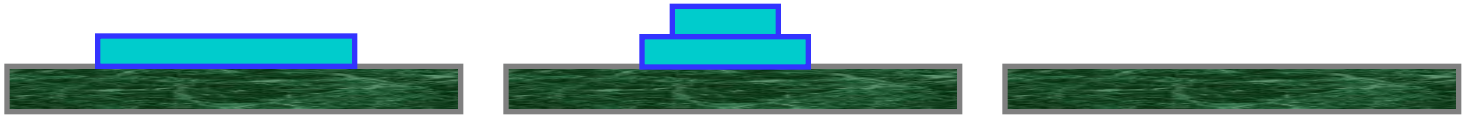
So we have an algorithm to move two elements

towers of Hanoi

- **Move three elements**



- **Use al algorithm to move two elements:** *notice evrywhere either a base or a bigger element*



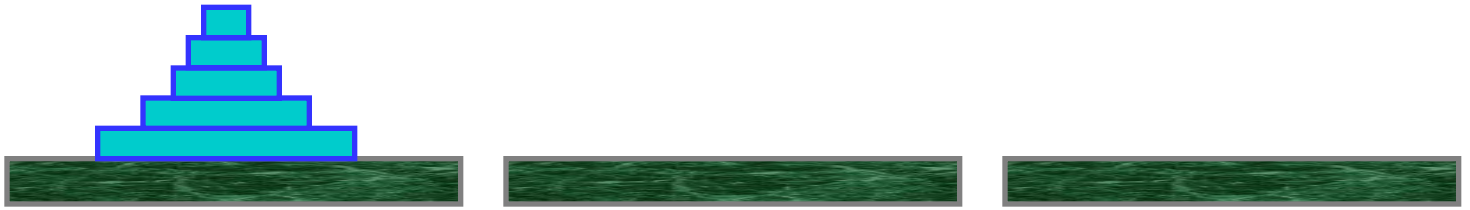
- **Move the biggest**

- **Use al algorithm to move two elements:** *notice everywhere again either a base or a bigger element*

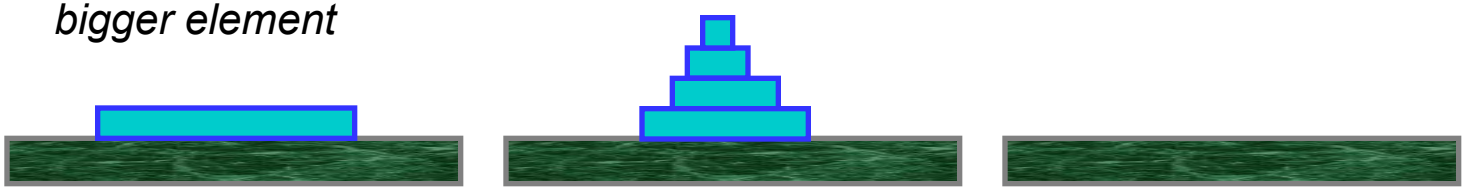
So we have an algorithm to move three elements

towers of Hanoi

- **Move *n* elements**

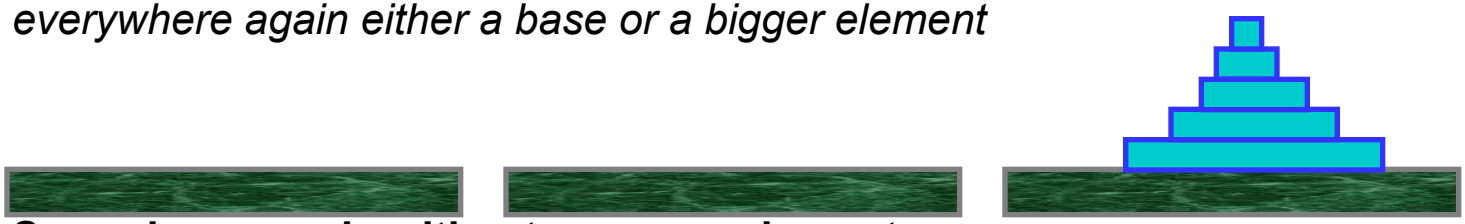


- **Use al algorithm to move *n-1* elements:** *notice evrywhere either a base or a bigger element*



- **Move the biggest**

- **Use al algorithm to move *n-1* elements:** *notice everywhere again either a base or a bigger element*



So we have an algorithm to move *n* elements

Recursive binary search

```
static int binarySearch(int[] A, int loIndex, int hiIndex, int value) {
    if (loIndex > hiIndex) {
        return -1;
    }
    else {
        int middle = (loIndex + hiIndex) / 2;
        if (value == A[middle])
                return middle;
        else if (value < A[middle])
                return binarySearch(A, loIndex, middle - 1, value);
             else   // value must be > A[middle]
                return binarySearch(A, middle + 1, hiIndex, value);
     }
} // end binarySearch()
```

Binary search

- Look for 15

1, 2, 5, 8, 13, 15, 23, 25, 45

1, 2, 5, 8, 13, 15, 23, 25, 45: index: [lowindex(1)+highindex(9)]/2=10/2=5
15>13: start binary_search(search:15, lowindex: 6 [5+1], higindex: 9)

1, 2, 5, 8, 13, 15, 23, 25, 45: index: [lowindex(6)+highindex(9)]/2=15/2=7.5=>7
15<23: start binary_search(search:15, lowindex: 6, highindex: 6 [7-1])

1, 2, 5, 8, 13, 15, 23, 25, 45: index: [lowindex(6)+highindex(6)]/2=12/2=6

The element is found in 3 steps

Deklaratiivne vs imperatiivne

- Programmeerimiskeeli ja -meetodeid saab klassifitseerida mitmel moel. Selle loengu kontekstis sobib jaotada programmeerimiskeeled kõigepealt kahte gruppi:

- Imperatiivsed keeled - sobivad samm-sammult, kindlas järjekorras täidetavate algoritmide esitamiseks. Programmid kujutavad endast arvutile antavate käskude jada. Tuntumad imperatiivsed keeled on C, Basic, Pascal, Java, objektorienteeritud keeled ja assemblerkeeled.

Procedural programmingprogramming is imperative programming in which the program is built from one or more procedures (also known as subroutines or functions).

  - Imperatiivsete keelte peamiseks **eeliseks** on arvuti tegevuse täpse kontrollimise ja suunamise võimaldamine, mis enamasti tagab maksimaalse töökiiruse.
  - **Miinusteks** on programmeerimise suur töömahukus - lahenduskäigu kõik detailid tuleb süsteemile esitada - ning suured raskused programmideanalüüsimisel, näiteks optimeerimise, verifitseerimise või paralleliseerimise tarvis.

Deklaratiivsed vs imperatiivsed keeled

- **Deklaratiivsed keeled** sobivad algoritmi esitamiseks käskude jadast abstraktsemal viisil. Programmeerija ei pruugi alati kõiki algoritmi detaile kirja panna, vaid võib esitada otsitava lahenduse kirjelduse , ning juba programmi täitmise käigus otsustab süsteem automaatselt, mis viisil täpselt seda lahendust otsida.

- Deklaratiivseteks keelteks võib lugeda loogilise programmeerimise keeled (näiteks Prolog) ja mitmed funktsionaalsed keeled (näiteks Haskell). Teoorias kasutatav lambda-arvutus on puhtalt funktsionaalse deklaratiivse keele näide.

Common declarative languages include those of database query languagesCommon declarative languages include those of database query languages (e.g., SQLCommon declarative languages include those of database query languages (e.g., SQL, XQueryCommon declarative languages include those of database query languages (e.g., SQL, XQuery), regular expressions, and mentioned above

Plussid ja miinused

- Deklaratiivsed keeled võimaldavad enamikku programme kiiremini ja mugavamalt kirjutada, kui imperatiivsed keeled - programmeerija ei pea kõigi detailide eest hoolt kandma. Tunduvalt lihtsam on ka programmide analüüs, näiteks programmi automaatsel kohandamisel paralleelarvutile, kus programmi täitmise juures töötab samaaegselt hulk protsessoreid.

- Peamiseks miinuseks on programmide väiksem töökiirus - deklaratiivne programm ei pruugi küll alati aeglasem olla, kui imperatiivne, kuid on seda harilikult siiski. Põhjuseks on siin keele automaattranslaatori väiksem intelligentsus kogenud programmeerijaga võrreldes.

Funktsionaalsed ja loogilised keeled

- Deklaratiivsed keeled jaotatakse
  - **Funktsionaalse programmeerimise keelteks** (näide: Haskell), kus lahendus kirjeldatakse funktsioonide kogu abil - ka viimast saab tegelikult käsitleda kui teatud tüüpi loogikasüsteemi.
  - **Loogilise programmeerimise keelteks** (näide: Prolog), kus otsitavat lahendust kirjeldatakse loogika keeles

Alus: lambda-arvutus

- Lambda-arvutuse keel on Alonzo Churchi poolt 1930. aastatel leiutatud lihtne ja universaalne meetod funktsioonide kirjapanekuks.

- Lambda-arvutuse teooria tegeleb arvutatavuse ja arvutatavate funktsioonide uurimisega, kasutades selleks lambda-arvutuse keelt kui universaalset programmeerimiskeelt.

- Churchi tees väidab, et iga algoritmi saab lambda-arvutuse keeles kirja panna. On võimalik näidata, et lambda-arvutus, nagu ka Prolog, C ja Basic on üks paljudest universaalsetest programmeerimiskeeltest.

- Konkreetselt on lambda-arvutuse keel ja teooria funktsionaalsete programmeerimiskeelte aluseks.

Annonüümsed funktsioonid

- üks harilikumaid praktikas kasutatavaid funktsioonide kirjapaneku viise on selline:

```
f(x) = x*x + 1
```

- Funktsioon esitatakse, andes talle samas nime, konkreetses näites `f`. Lambda-arvutuses esitatakse funktsioone, vastupidi, kui anonüümseid, nimeta terme. äsjatoodud näide on lambda-kirjaviisis

```
λ x. x*x + 1
```

- Lambda-sümboli λ järele kirjutatakse funktsiooni formaalseks parameetriks olev muutuja, seejärel punkt ja funktsiooni keha.

Lambda-arvutus

- Mitme formaalse parameetriga funktsioone esitatakse mitme üksteise sees oleva üheparameetrilise funktsioonina:

```
λ x. λ y. x*x+y*y.
```